

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS  
VOLUME XXXIV

No. 10

President: J. VAN DER HOEVE  
Secretary: B. BROUWER

---

CONTENTS

- A. PANNEKOEK: "The Central Intensity in the Fraunhofer Lines", p. 1352.  
G. BORELIUS, W. H. KEESEM, C. H. JOHANSSON and J. O. LINDE: "Measurements of thermo-electric forces of lead and tin down to the temperature of liquid helium", p. 1365.  
A. A. NIJLAND: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen. V. S Ursae majoris", p. 1372. (With one plate).  
F. A. H. SCHREINEMAKERS: "Osmosis in binary systems in which two membranes". I, p. 1380.  
J. G. VAN DER CORPUT: "Über Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden", p. 1388.  
M. J. BELINFANTE: "Über die Elemente der Funktionentheorie und die PICARDSchen Sätze in der intuitionistischen Mathematik". (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 1395.  
J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG: Über eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie". (Communicated by Prof. P. EHRENfest), p. 1398.  
H. P. A. WILLEMS: "Die Koordination beim Herzen von Helix pomatia und die Bedeutung der Dehnung für die Auslösung der Systole und die Koordination". (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 1408.  
F. KÖGL und A. J. HAAGEN SMIT: Über die Chemie des Wuchsstoffs". (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT), p. 1411.  
HELENA F. M. PETTER: "On Bacteria of Salted Fish". (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT), p. 1417.  
S. P. JAMES: "The use of plasmoquine in the prevention of malarial infections". (Communicated by Prof. W. SCHÜFFNER), p. 1424.  
E. P. SNIJDERS: "An endemic focus of rhinoscleroma in Sumatra (Dutch East-Indies)". (Communicated by Prof. W. SCHÜFFNER), p. 1426. (With two plates and one Table).

**Astrophysics. — The Central Intensity in the Fraunhofer Lines.** By  
A. PANNEKOEK.

(Communicated at the meeting of December 19, 1931).

1. In our paper "The Theoretical Contours of Absorption Lines"<sup>1)</sup> it was stated that there is a marked contradiction between the observed contours of absorption lines and the theoretical results derived on the basis of the most plausible assumptions on stellar atmospheres. Whereas theory demands an intensity zero (i.e. below one percent) in the centre of a line, the observed central intensities are from 0.07 upward to several tenths. The different causes for broadening, considered in that paper, cannot explain why for the bulk of the Fraunhofer lines in the solar spectrum the central intensity should not be practically zero. The explanation by means of collisions, given by UNSÖLD and used also by WOOLLEY, rests on the use of approximate formulae, which assume a constant density throughout the absorbing layers. Owing to the very high value of the monochromatic absorption coefficient in the centre of a line only the upper layers of the atmosphere, where collisions do not play any part, determine the central intensity.

An explanation may be found, however, if in some way light from the wings could be transferred to the centre. In the wings the intensity has all values between the full background brightness and zero; the atoms producing the line absorb this winglight, are lifted to a higher energy level and must in falling back re-emit this energy. In the existing discussions, however, it was always assumed that the excited atom re-emits radiation of the same wave-length as had previously been absorbed, just as if it remembered by what means it came into the higher level. So the equations for each wave-length, used in deriving the resulting intensities, were quite independent of other wave lengths.

Recently a mutual influence of different wave lengths in the realm of a line has been inferred by O. HALPERN<sup>2)</sup> from the classical formulae of resonance. If the incident light of a frequency  $\nu$  somewhat deviating from the proper frequency of the resonator  $\nu_0$ , consists of single finite

<sup>1)</sup> Monthly Notices R. A. S. **91**, p. 139 (1930).

<sup>2)</sup> Zeitschr. f. Physik **67**, S. 523 (1931).

or damped wave-trains, it can be resolved by FOURIER analysis into a broadened band, decreasing with increasing wave-length difference; each separate wave-length in this band produces forced vibrations of the resonator, and it appears that the intensity of these induced vibrations has two marked maxima, one for frequency  $\nu$  and another for  $\nu_0$ . In a different way R. VAN DER RIET WOOLLEY<sup>1)</sup> came to the same result, by making use of the model description of the resonance broadening of the lines, assuming the energy levels themselves broadened. We have to assume in this model that within a broadened level (here called a state of the atom) the weight of each special level depends on  $\Delta\nu$  in the same way as the absorption and diffusion coefficient in ordinary theory depends on  $\Delta\nu$ , i.e. shows the same strong core and the same wings, decreasing with  $1/\Delta\nu^2$ . Then from each level in the lower state I the probability of being lifted to some level of the higher state II is proportional to the product of their weights. A beam of light of central frequency  $\nu_0$  is absorbed practically only by the mean lower level  $I_0$ , from which the atoms are lifted to the mean higher level  $II_0$ ; they return mostly to  $I_0$ , emitting  $\nu_0$ , and for a small part to deviating lower levels  $I_1$ , emitting wing frequencies  $\nu_1$ . A beam of light of wing frequency  $\nu_1$  is absorbed with a smaller chance by  $I_0$ , lifting the atoms to the deviating higher level  $II_1$ , and is absorbed with the same chance by  $I_{-1}$  lifting these atoms to the mean level  $II_0$ . For both cases the atoms return with dominant chance to  $I_0$ ; in the first case  $\nu_1$  is emitted, in the second case  $\nu_0$ . Hence radiation of some wing frequency after absorption is emitted half as radiation of the same frequency and half as radiation of normal frequency. At the same time of the radiation absorbed of normal frequency the greater part is emitted in the same frequency and a small part is distributed over the wing frequencies.

Quantum mechanics assigns different resonance coefficients to the different states of an atom; each of them is proportional to the sum total of the transition probabilities from this state, i.e. inverse proportional to its average life time. Then the absorption coefficient for a wing frequency is determined by the resonance coefficients of the lower and the upper state, added together, in accordance with WEISSKOPF and WIGNER's result. The absorbed energy is divided into two unequal parts; the part emitted as normal frequency is produced by the wings of the lower state only, and the part re-emitted in the same frequency depends on the wings of the upper state.

It seemed worth while to consider the bearing of these theoretical ideas upon the explanation of the central intensity in the Fraunhofer lines. In view of the complications introduced by the mutual influence of the different radiations we are obliged to assume a simplified model of the mechanism of formation of the line. We cannot make use of the

<sup>1)</sup> Monthly Notices R. A. S. 91, p. 977 (1931).

exact formulae, which take account of the variations in density and in absorption coefficient with depth, because they can be only solved by numerical integrations. We will assume an atmosphere of constant density, where the coefficients of absorption and diffusion have the same ratio in all the layers; moreover we neglect the increase of the absorption coefficient in the centre of the line due to collisions of excited atoms. For the case of each wave-length independent of the others we have then the formulae given by MILNE<sup>1</sup>). We have to modify them according to our case of mutual influence.

2 We assume the core of the absorption line to have a certain width  $w$  and a constant high diffusion coefficient  $s_0$ . For the wings we have in the two states much smaller coefficients  $s_1, s_2$ , decreasing with increasing distance to the centre. After a wave-length  $\nu_0$  of the core has been absorbed by a layer of atoms, this energy is distributed in the re-emission over the whole width of the line, each wave-length taking part in ratio of its  $s$ . When a wave-length of the wing has been absorbed ( $s = s_1 + s_2$ ), the energy is emitted partly as light of the same wave-length ( $s_2$ ), partly ( $s_1$ ) as light of the central core, evenly distributed over the width of the core. The coefficient of general absorption is  $k$ : the intensities of the outward and inward streams of radiation are called  $I_0$  and  $I'_0$  for a wave-length of the core,  $I_1$  and  $I'_1$  (functions of  $\lambda$ ) for a wave-length of the wing. The total amount of absorbed energy of the central wave-lengths in the layer  $dx$  is  $(s_0 + k)(I_0 + I'_0)w dx$ ; the part with  $k$  is transformed into heat; the rest is distributed over the line in such a way that each receives

$$\frac{s_0 \text{ or } s_1}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 (I_0 + I'_0) w dx.$$

The energy of wing light absorbed in this layer amounts to

$$dx \int (s + k)(I_1 + I'_1) d\lambda,$$

of which the  $k$  part again is transformed into heat. From the rest each wave-length in the core receives  $\frac{dx}{w} \int s_1 (I_1 + I'_1) d\lambda$ , and each wave-length in the wing receives from its own absorbed energy  $s_2(I_1 + I'_1)$ . Hence the equations for the streams of energy are ( $x$  counted downward)

---

<sup>1</sup>) Monthly Notices R. A. S. 89, p. 7

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_0}{dx} &= + (s_0 + k) I_0 - \frac{1}{2w} \int s_1 (I_1 + I'_1) d\lambda - \frac{1}{2} \frac{s_0}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 w (I_0 + I'_0) - kE \\ \frac{dI'_0}{dx} &= - (s_0 + k) I'_0 + \frac{1}{2w} \int s_1 (I_1 + I'_1) d\lambda + \frac{1}{2} \frac{s_0}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 w (I_0 + I'_0) + kE \\ \frac{dI_1}{dx} &= + (s + k) I_1 - \frac{1}{2} s_2 (I_1 + I'_1) - \frac{1}{2} \frac{s_1}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 w (I_0 + I'_0) - kE \\ \frac{dI'_1}{dx} &= - (s + k) I'_1 + \frac{1}{2} s_2 (I_1 + I'_1) + \frac{1}{2} \frac{s_1}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 w (I_0 + I'_0) + kE \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

As in our former papers we put  $I + I' = y$  (mean stream density),  $I - I' = z$  (net outward stream); by adding and subtracting we find

$$\frac{dy_0}{dx} = (s_0 + k) z_0 \quad ; \quad \frac{dy_1}{dx} = (s + k) z_1 ; \dots \quad . \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_0}{dx} &= (s_0 + k) y_0 - \frac{1}{w} \int s_1 y_1 d\lambda - \frac{s_0}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 w y_0 - 2kE \\ \frac{dz_1}{dx} &= (s + k) y_1 - s_2 y_1 - \frac{s_1}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 w y_0 - 2kE \end{aligned} \right\} \quad . \quad (3)$$

Multiplying the first of these equations (3) with  $w$ , integrating the second after  $\lambda$ , and adding and subtracting the results, we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( w z_0 + \int z_1 d\lambda \right) &= k \left( w y_0 + \int y_1 d\lambda \right) - 2kE \left( \int d\lambda + w \right) \\ \frac{d}{dx} \left( w z_0 - \int z_1 d\lambda \right) &= \left( \frac{2 \int s_1 d\lambda}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 + k \right) w y_0 - \int (2s_1 + k) y_1 d\lambda + \\ &\quad + 2kE \left( \int d\lambda - w \right) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (4)$$

We put

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\int s_1 d\lambda}{s_0 w + \int s_1 d\lambda} s_0 = S \\ & u = (2S+k)wy_0 - \int (2s_1+k)y_1 d\lambda \\ & v = kw y_0 + k \int y_1 d\lambda \end{aligned} \right\} \quad . . . . \quad (5)$$

Then we have

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= (2S+k)(s_0+k)wz_0 - \int (s+k)(2s_1+k)z_1 d\lambda \\ \frac{dv}{dx} &= k(s_0+k)wz_0 + k \int (s+k)z_1 d\lambda \end{aligned}$$

Again differentiating and substituting (4) and (5) we find

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= a^2 \left( u + 2kE \left( \int d\lambda - w \right) \right) + b^2 \left( v - 2kE \left( \int d\lambda + w \right) \right) \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= c^2 \left( u + 2kE \left( \int d\lambda - w \right) \right) + e^2 \left( v - 2kE \left( \int d\lambda + w \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

where

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2}(2S+k)(s_0+k) + \frac{1}{2}\overline{(s+k)(2s_1+k)} & c^2 &= \frac{1}{2}k(s_0+k) - \frac{1}{2}\overline{k(s+k)} \\ b^2 &= \frac{1}{2}(2S+k)(s_0+k) - \frac{1}{2}\overline{(s+k)(2s_1+k)} & e^2 &= \frac{1}{2}k(s_0+k) + \frac{1}{2}\overline{k(s+k)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

and the mean values are defined by

$$\overline{s+k} \int z_1 d\lambda = \int (s+k)z_1 d\lambda \quad ; \quad \overline{(s+k)(2s_1+k)} \int z_1 d\lambda = \int (s+k)(2s_1+k)z_1 d\lambda.$$

The values of the net stream  $z_1$  which act as the weights in averaging  $s$  are variable with the depth; hence in different layers the averaging is made with different weights and the resulting mean values are functions of the depth (with increasing depth the weight of the high values of  $s$  becomes smaller). We may, however, neglect this variability, because it affects only small secondary terms in the coefficients. If we treat  $a^2 b^2 c^2 e^2$  as constant coefficients, the solution of the equations (6) presents no difficulty. Eliminating  $v$  we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4u}{dx^4} - (a^2 + e^2) \frac{d^2u}{dx^2} + (a^2e^2 - b^2c^2) \left( u + 2kE \left( \int d\lambda - w \right) \right) + \\ + \left( (b^2 - a^2) \int d\lambda + (b^2 + a^2)w \right) 2k \frac{d^2E}{dx^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad . . . . \quad (8)$$

If we put

$$a^2 + e^2 = p^2 + q^2 \quad a^2 e^2 - b^2 c^2 = p^2 q^2. \quad \dots \quad (9)$$

the solution is

$$\left. \begin{aligned} u = & Ae^{-px} + A'e^{px} + Ce^{-qx} + C'e^{qx} - \\ & - \frac{1}{(D^2-p^2)(D^2-q^2)} \left\{ p^2 q^2 \left( \int d\lambda - w \right) 2kE + \right. \\ & \left. + \left( (b^2-a^2) \int d\lambda + (b^2+a^2)w \right) 2k \frac{d^2 E}{dx^2} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

It is easily seen that by the condition of finite radiation at great depths the coefficients  $A'$  and  $C'$  must vanish. For the particular solutions we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D^2-p^2)(D^2-q^2)} E = & \frac{-1}{p(p^2-q^2)} \left\{ e^{px} \int_x^\infty E e^{-px} dx + e^{-px} \int_0^x E e^{px} dx \right\} + \\ & + \frac{1}{q(p^2-q^2)} \left\{ e^{qx} \int_x^\infty E e^{-qx} dx + e^{-qx} \int_0^x E e^{qx} dx \right\} \\ \frac{1}{(D^2-p^2)(D^2-q^2)} \frac{d^2 E}{dx^2} = & \frac{-1}{p(p^2-q^2)} \left\{ e^{px} \int_x^\infty \frac{d^2 E}{dx^2} e^{-px} dx + e^{-px} \int_0^x \frac{d^2 E}{dx^2} e^{px} dx \right\} + \\ & + \frac{1}{q(p^2-q^2)} \left\{ e^{qx} \int_x^\infty \frac{d^2 E}{dx^2} e^{-qx} dx + e^{-qx} \int_0^x \frac{d^2 E}{dx^2} e^{qx} dx \right\} = \\ = & \frac{-1}{p(p^2-q^2)} \left\{ (pE_0 - E'_0) e^{-px} + p^2 e^{px} \int_x^\infty E e^{-px} dx + p^2 e^{-px} \int_0^x E e^{px} dx \right\} \\ & + \frac{1}{q(p^2-q^2)} \left\{ (qE_0 - E'_0) e^{-qx} + q^2 e^{qx} \int_x^\infty E e^{-qx} dx + q^2 e^{-qx} \int_0^x E e^{qx} dx \right\}, \end{aligned}$$

where  $E_0$  and  $E'_0$  have been written for the values of  $E$  and  $\frac{dE}{dx}$  at the surface. Putting now

$$\frac{p^2 q^2}{p^2 - q^2} \left( \int d\lambda - w \right) = c_1 \quad \frac{1}{p^2 - q^2} \left\{ (b^2 - a^2) \int d\lambda + (b^2 + a^2)w \right\} = c_2. \quad (11)$$

we have

$$u = Ae^{-px} + Ce^{-qx} + \\ + 2k \left[ \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \left( pe^{px} \int_x^\infty E e^{-px} dx + pe^{-px} \int_0^x E e^{px} dx \right) + \right. \\ \left. + c_2 \left( E_0 - \frac{E'_0}{p} \right) e^{-px} \right]$$

— the same form with  $q$  for  $p$ .

$$\frac{du}{dx} = -pAe^{-px} - qCe^{-qx} + \\ + 2k \left[ \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \left( p^2 e^{px} \int_x^\infty E e^{-px} dx - p^2 e^{-px} \int_0^x E e^{px} dx \right) - \right. \\ \left. - pc_2 \left( E_0 - \frac{E'_0}{p} \right) e^{-px} \right] \quad (12)$$

— the same form with  $q$  for  $p$ .

$$\frac{d^2u}{dx^2} = +p^2 Ae^{-px} + q^2 Ce^{-qx} + \\ + 2k \left[ \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \left( p^3 e^{px} \int_x^\infty E e^{-px} dx + p^3 e^{-px} \int_0^x E e^{px} dx - 2p^2 E \right) + \right. \\ \left. + p^2 c_2 \left( E_0 - \frac{E'_0}{p} \right) e^{-px} \right]$$

— the same form with  $q$  for  $p$ .

The first of the equations (6) now gives the value of  $v$

$$v = \frac{1}{b^2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{a^2}{b^2} u + 2kE \left( \frac{b^2 - a^2}{b^2} \int d\lambda + \frac{b^2 + a^2}{b^2} w \right)$$

Since

$$\frac{1}{b^2} \left\{ -2k \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) 2p^2 E + 2k \left( \frac{c_1}{q^2} + c_2 \right) 2q^2 E \right\} = \\ = -2kE \left( \frac{b^2 - a^2}{b^2} \int d\lambda + \frac{b^2 + a^2}{b^2} w \right)$$

the terms with  $2E$  vanish and we find

$$\left. \begin{aligned}
 v &= \frac{p^2-a^2}{b^2} Ae^{-px} + \frac{q^2-a^2}{b^2} Ce^{-qx} + \\
 &+ 2k \frac{p^2-a^2}{b^2} \left[ \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \left( pe^{px} \int_x^\infty E e^{-px} dx + pe^{-px} \int_0^x E e^{px} dx \right) + \right. \\
 &\quad \left. + c_2 \left( E_0 - \frac{E'_0}{p} \right) e^{-px} \right] \\
 &\quad - \text{the same form with } q \text{ for } p; \\
 \frac{dv}{dx} &= -p \frac{p^2-a^2}{b^2} Ae^{-px} - q \frac{q^2-a^2}{b^2} Ce^{-qx} + \\
 &+ 2k \frac{p^2-a^2}{b^2} \left[ \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \left( p^2 e^{px} \int_x^\infty e^{-px} dx - p^2 e^{-px} \int_0^x E e^{px} dx \right) - \right. \\
 &\quad \left. - pc_2 \left( E_0 - \frac{E'_0}{p} \right) e^{-px} \right] \\
 &\quad - \text{the same form with } q \text{ for } p.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

The boundary conditions in the deep interior are satisfied by the vanishing of the terms with  $E$ . The boundary conditions at the surface determine the integration constants  $A$  and  $C$ . At the surface (where the quantities shall be denoted by the index 0) we have

$$y_{00} = z_{00}, \quad y_{10} = z_{10}; \quad \text{or} \quad y_{00} - \frac{1}{s_0+k} \frac{dy_{00}}{dx} = 0; \quad y_{10} - \frac{1}{s+k} \frac{dy_{10}}{dx} = 0$$

for each wave-length; for their assemblage we have

$$(s_0+k) w y_{00} - w \frac{dy_{00}}{dx} = 0; \quad \overline{s+k} \int y_{10} d\lambda - \int \frac{dy_{10}}{dx} d\lambda = 0. \quad (14)$$

Since

$$u_0 = (2S+k) w y_{00} - \overline{2s_1+k} \int y_{10} d\lambda; \quad v_0 = k w y_{00} + k \int y_{10} d\lambda$$

we find by solving

$$\left. \begin{aligned}
 N w y_{00} &= k u_0 + (\overline{2s_1+k}) v_0; \quad N w \frac{dy_{00}}{dx} = k \frac{du_0}{dx} + \overline{2s_1+k} \frac{dv_0}{dx} \\
 N \int y_{10} d\lambda &= -k u_0 + (2S+k) v_0; \quad N \int \frac{dy_{10}}{dx} d\lambda = -k \frac{du_0}{dx} + (2S+k) \frac{dv_0}{dx} \\
 N &= k (2S+k + \overline{2s_1+k})
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

The mean values  $\bar{2s_1+k}$  occurring in these equations are constant surface values; the weights are here the surface values  $y_{10} = z_{10}$ , the observed intensities.

The surface values of  $u$  and  $v$  and their derivates, which must be introduced here, are found by taking  $x=0$  in the equations (12) and (13). By means of the quantities

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \int_0^\infty 2k E e^{-px} pdx &= P \quad ; \quad c_2 \left( E_0 - \frac{1}{p} E'_0 \right) = R \\ \left( \frac{c_1}{q^2} + c_2 \right) \int_0^\infty 2k E e^{-qx} qdx &= Q \quad ; \quad c_2 \left( E_0 - \frac{1}{q} E'_0 \right) = T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

we can express them:

$$u_0 = (A + R + P) + (C - T - Q)$$

$$\frac{du_0}{dx} = p(-A - R + P) + q(-C + T - Q)$$

$$v_0 = \frac{p^2 - a^2}{b^2} (A + R + P) + \frac{q^2 - a^2}{b^2} (C - T - Q)$$

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{p^2 - a^2}{b^2} p(-A - R + P) + \frac{q^2 - a^2}{b^2} q(-C + T - Q)$$

By introducing the quantities:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= k + \overline{(2s_1+k)} \frac{p^2 - a^2}{b^2} \quad ; \quad \beta_0 = k + \overline{(2s_1+k)} \frac{q^2 - a^2}{b^2} \\ a_1 &= -k + (2S + k) \frac{p^2 - a^2}{b^2} \quad ; \quad \beta_1 = -k + (2S + k) \frac{q^2 - a^2}{b^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

the surface conditions take the form

$$\left. \begin{aligned} a_0 \{(A + R)(s_0 + k + p) + P(s_0 + k - p)\} + \\ + \beta_0 \{(C - T)(s_0 + k + q) - Q(s_0 + k - q)\} &= 0 \\ a_1 \{(A + R)(\overline{s+k+p}) + P(\overline{s+k-p})\} + \\ + \beta_1 \{(C - T)(\overline{s+k+q}) - Q(\overline{s+k-q})\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

and the surface values of  $y$ , the emitted intensities, are given by

$$\left. \begin{aligned} Nwy_{00} &= a_0(A + R + P) + \beta_0(C - T - Q) \\ N \int y_{10} d\lambda &= a_1(A + R + P) + \beta_1(C - T - Q) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

It appears that in eliminating the arbitrary constants  $A$  and  $C$  by means of (19) the quantities  $R$  and  $T$  are eliminated at the same time. We find:

$$\left. \begin{aligned} w y_{00} &= \frac{1}{ND} (a_0 \beta_1 - a_1 \beta_0) \{2 p a_0 P(\bar{s+k}+q) - 2 q \beta_0 Q(\bar{s+k}+p)\} \\ \int y_{10} d\lambda &= \frac{1}{ND} (a_0 \beta_1 - a_1 \beta_0) \{2 p a_1 P(s_0+k+q) - 2 q \beta_1 Q(s_0+k+p)\} \\ D &= a_0 \beta_1 (s_0+k+p)(\bar{s+k}+q) - a_1 \beta_0 (\bar{s+k}+p)(s_0+k+q). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

In the computation of the integrals  $P$  and  $Q$  we assume that the function  $E$  is determined by the general absorption coefficient  $k$  only; we have then  $E = E_0(1 + kcx)$ , where  $c$  is a numerical coefficient of the order of unity depending on the wave-length. We find:

$$\left. \begin{aligned} P &= \left( \frac{c_1}{p^2} + c_2 \right) \int_0^\infty 2kE_0(1+kcx) e^{-px} pdx \\ &= \frac{1}{p^2 - q^2} \left( (b^2 - a^2 + q^2) \int d\lambda + (b^2 + a^2 - q^2) w \right) 2kE_0 \left( 1 + \frac{kc}{p} \right) \\ Q &= \frac{1}{p^2 - q^2} \left( (b^2 - a^2 + p^2) \int d\lambda + (b^2 + a^2 - p^2) w \right) 2kE_0 \left( 1 + \frac{kc}{q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

3. For numerical evaluation of these expressions it is first necessary to consider the different orders of magnitude of the coefficients. The coefficient  $s_0$  is very large,  $10^5$  or  $10^6$  times larger than  $s$  in the wings and  $k$ . If we consider  $k$  and  $s$  to be of order zero, and  $s_0$  of order 2, then  $S$  is of order 1. In the expressions (7) for  $a^2, b^2, c^2, e^2$  the second terms may be neglected, and from

$$p^2 = a^2 + e^2 = (S+k)(s_0+k) \quad ; \quad q^2 = \frac{a^2 e^2 - b^2 c^2}{a^2 + e^2} = k(\bar{s+k}); \quad . \quad (23)$$

we see that  $p$  is of the order  $1^{1/2}$ ,  $q$  of the order 0. Thus it appears, that the uncertainty due to the variability of the mean values, is removed for the greater part and remains only in the value of  $q$ . From the expressions, deduced now from (18)

$$a_0 = k \left( 1 + \frac{2s_1 + k}{2S+k} \right) \quad ; \quad a_1 = -k \frac{s+k}{s_0} \quad ; \quad \beta_0 = -2s_1 \quad ; \quad \beta_1 = -2(S+k) \quad (24)$$

we find their order of magnitude 0, -2, 0, and 1. Hence the products  $a_0 \beta_1$  and  $a_1 \beta_0$  are of the order 1 and -2, and in the expression for  $D$  the first term has the order 3, the second the order  $1^{1/2}$ . So in  $D$  we may restrict ourselves to the first term only, and in the other equations

(21) the value  $a_1 \beta_0$  may be omitted. The result for  $y_{00}$  now assumes the much simpler form

$$wy_{00} = \frac{2p}{(2S+k)(s_0+k+p)} P + \frac{2q \cdot 2s_1 \cdot (s+k+p)}{k(2S+k)(s_0+k+p)(s+k+q)} Q$$

The integrals  $P$  and  $Q$ , which by these substitutions take the form

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \frac{2S+k}{S+k} w - \frac{2s_1(s+k)}{(S+k)(s_0+k)} \int d\lambda \left\{ 2kE_0 \left( 1 + \frac{kc}{p} \right) \right\} \right\} \\ Q &= \left\{ \frac{S}{S+k} w + \int d\lambda - \frac{2s_1(s+k)}{(S+k)(s_0+k)} \int d\lambda \left\{ 2kE_0 \left( 1 + \frac{kc}{q} \right) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

can be simplified in the same manner. Since  $\frac{1}{w} \int s_1 d\lambda$  is nearly equal to  $S$ , the first term in the brackets is the most important in  $P$ , whereas in  $Q$  it is just the second term which is one order larger than the first. Substituting these chief terms only into the equation for  $y_{00}$  we find:

$$\begin{aligned} y_{00} &= \frac{2pk}{(S+k)(s_0+k+p)} 2E_0 \left( 1 + \frac{kc}{p} \right) + \\ &\quad + \frac{2q(s+k+p)}{(2S+k)(s+k+q)} \frac{\int 2s_1 d\lambda}{w(s_0+k+p)} 2E_0 \left( 1 + \frac{kc}{q} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

This equation may be used to compute the value of the radiated intensity of the centre of a Fraunhofer line; the background intensity is  $E_0(1+c)$ . To find the order of magnitude of these terms and to see in what way the determining quantities play a part in them, we simplify them by omitting all minor terms. We substitute

$$p = \sqrt{Ss_0} \quad ; \quad S = \frac{\int s_1 d\lambda}{w} \quad ; \quad q = \sqrt{k(s+k)}.$$

In the second term for  $q/(s+k+q)$  we write  $1/\left(1 + \sqrt{\frac{s+k}{k}}\right)$ ; the factor  $1 + \frac{kc}{q}$  for  $c=1$  is equal to  $\left(1 + \sqrt{\frac{k}{s+k}}\right)$ , so that combined they give a factor  $\sqrt{\frac{k}{s+k}}$ , which for  $k > s$  approaches to 1.

The simplified formula is now

$$y_{00} = \left( \frac{2k}{\sqrt{Ss_0}} + 2 \sqrt{\frac{S}{s_0}} \sqrt{\frac{k}{s+k}} \right) 2E_0$$

If we compare it with the intensity for the case that the centre of the line is not influenced by the wings<sup>1)</sup>, viz (for  $c = 1$ )

$$y'_{00} = 2E_0 \left| \frac{k}{s_0} \right| : y'_{10} = 2E_0 \left| \frac{k}{s+k} \right|,$$

we see that the first value, if we identify it with the first term above, is diminished, but that a second larger term is added, produced by the radiation coming from the wings. We may state the result for its value in this way, that for  $k$  in the ordinary expression now  $S = \frac{1}{w} \int s_1 d\lambda$  is substituted, which represents the emission of wing light (of intensity  $y'_{10}$ ) distributed over the width of the core. In ordinary theory the intensity of the centre is produced by black radiation throwing light into this centre (coefficient  $k$ ), which is weakened by the atomic diffusion (coefficient  $s_0$ ). Now, that  $k$  is very small, the light thrown into this centre by the wings (coefficient  $S$ ) takes its place.

We will apply these formulas to the case of Ca atoms, for which numerical data are given elsewhere<sup>2)</sup>. The theoretical absorption coefficient according to these data may be expressed by

$$s = 1/\Delta\lambda^2 + [6.16] e^{-(48\Delta\lambda)^2},$$

where the second term denotes the DOPPLER curve of the core and the first term the wings. There is of course something arbitrary in the separation of wings and core; strictly speaking each partial wave-length interchanges with every other wave-length. There is, however, a sudden transition from the low wing values to the steep and high central values at nearly  $\Delta\lambda = 1/16 \text{ \AA}$ . So we take here our boundaries, at a half-width 0.063  $\text{\AA}$ . The average value of  $s$  within these limits  $s_0 = [5.63]$ . The value of the wing integral up from this lower limit  $\int s d\lambda = \int d\lambda / \Delta\lambda^2 = 16$ . If we assume  $s_1 = 1/2 s$  we have  $S = 128$ .

Then the additional term in the central intensity, without the last factor which for dark wings falls considerably below 1, is 0.034, expressed in fraction of the background. This factor may be evaluated for different values of  $k$  (increasing values of  $k$  mean in reality decreasing values of  $s$  and  $s_0$ , i.e. of the concentration). From equation (26) we see that the average value is determined by the integral

$$\begin{aligned} \int \frac{q}{s+k+q} \left( 1 + \frac{k}{q} \right) 2s_1 d\lambda &= \int 2s_1 \sqrt{\frac{k}{s+k}} d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{k}{4s'}} \ln \frac{\sqrt{k+s'} + \sqrt{s'}}{\sqrt{k+s'} - \sqrt{s'}} \times \int 2s_1 d\lambda \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Handbuch der Astrophysik III 1, S. 305; MILNE, Monthly Notices R. A. S. **89**, p. 7.

<sup>2)</sup> Monthly Notices R. A. S. **91**, p. 151. The values in square brackets are logarithms.

where  $s'$  denotes the value of  $s$  at the lower boundary 0.063 Å. For  $k = 1, 10, 100$  (when the ordinary intensity would be .0015, .005, .015) the factor is .22, .46, .78, and the additional term is .007, .016, .027.

The values found here for the second term, show that it is not sufficient in itself to explain the observed central intensities of spectral lines. It is, however, important that the central values from a few thousandths, given by the former treatment, now rise above one hundredth, so that additional influences, not strong enough by themselves, may raise them somewhat higher. Moreover the computation has been made with the classical resonance formula; according to the quantum mechanics the classical coefficient of the resonance term should be multiplied by factors  $f$ , certainly amounting in some cases to 4 and perhaps higher still<sup>1)</sup>; in this case the additional term in the centre has to be multiplied by  $\sqrt{f}$ . It must be remarked, however, that the resonance coefficient for the lowest state of an atom is practically zero; so for the lines absorbed by this lowest state  $s_1 = 0$  and the central intensity is not increased by radiation from the wings.

---

<sup>1)</sup> MINNAERT u MULDERS, Zeitschr. f. Astrophysik 2, S. 179; PANNEKOEK, These Proceedings 34, p. 763.

**Physics.** — *Measurements of thermo-electric forces of lead and tin down to the temperature of liquid helium.* By G. BORELIUS, W. H. KEESOM, C. H. JOHANSSON and J. O. LINDE. (Communication N°. 217c from the Physical Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

§ 1. *Introduction.* The present investigation forms a continuation of the measurements of thermo-electric forces carried out by the authors in 1929 down to the temperature of liquid hydrogen<sup>1)</sup>. The measurements have now been extended to the temperatures of liquid helium<sup>2)</sup> and embrace firstly the supraconductors *Pb* and *Sn*. Communications on measurements concerning some other metals and some binary alloys of *Cu* and *Au* with small concentrations of other elements, especially *Fe*, *Co* and *Ni*<sup>3)</sup> will soon follow. These measurements, for which we could dispose of a couple of months only, are to be considered as a first exploration with regard to thermo-electric forces of the field covered by the temperatures obtainable with liquid helium.

The thermo-electromotive forces were measured against a certain silver-alloy-wire used as a normal also in our earlier investigation, and the thermo-electric THOMSON-effect of which has earlier been measured by BORELIUS, KEESOM and JOHANSSON<sup>4)</sup> down to the temperature of liquid hydrogen. This wire will in the following paragraphs be referred to as the "normal".

§ 2. *Measuring method and apparatus.* The measuring method was mainly the same as in the previous work. The test-wires had one common junction and were at the other ends connected with leads of copper. The junctions with the leads were held at a constant low temperature  $T_0$ . The common junction was first brought to the same temperature  $T_0$ , to get the e.m.f.  $E_0$  in the leads, necessary to be known as a correction, and was then raised successively to the temperatures  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , ..... and the corresponding thermo-electromotive forces  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , ..... were measured. The thermo-electric force per degree was calculated from the combinations

<sup>1)</sup> These Proceedings 33, 17 and 32, 1930, Comm. Leiden, N°. 206a and 206b.

<sup>2)</sup> Measurements of thermo-electric forces at liquid helium temperatures were made for the first time by KAMERLINGH ONNES and HOLST, These Proceedings 17, 760, 1914, Comm. Leiden N°. 142c § 2.

<sup>3)</sup> Viz. of platinum and of alloys of *Cu* with *Fe* down to the temperatures obtainable with liquid helium, of the others down to the temperatures obtainable with liquid hydrogen.

<sup>4)</sup> These Proceedings 31, 1046, 1928, Comm. Leiden N°. 196a.

$E_1-E_0$ ,  $E_2-E_1$ ,  $E_3-E_2$  ...., the corresponding temperature-differences being about 1 to 2 degrees at the lowest and 5 to 10 degrees at the highest temperatures. It may be noted, that this way of combining is slightly different from that used in our earlier work, where  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , ..... were always combined with  $E_0$ . The present way of calculation somewhat increases the risk of small errors due to inhomogeneities in the test-wires, but gives a more equal distribution of the measured points on the temperature scale.

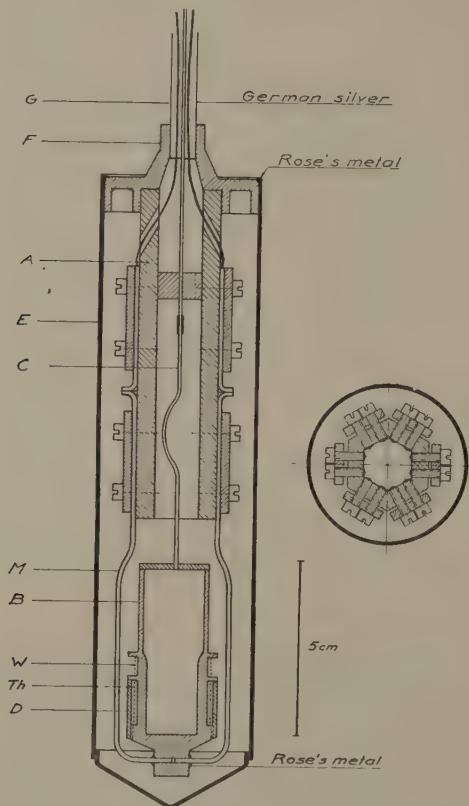


Fig. 1.

The apparatus was similar to the one used in 1929 but was modified with regard to the measurements with liquid helium. The inner parts of the apparatus can be seen in Fig. 1. Four to six of the test wires  $M$  (length about 12 cm, thickness 0.75—1 mm) could be applied at the same time. One end was joined to a lead of copper and the junction was fastened to the (hexagonal) copper tube  $A$ , which was kept at constant temperature in a cryostat. The wires were electrically insulated from  $A$  by means of cigarette paper in such a way that a good thermal contact was obtained.

The other ends of the test-wires were soldered with ROSE's metal directly to a small vessel *B* of copper, the temperature of which could be increased by means of a heating coil *W*. The vessel itself was a helium thermometer with a volume of 10 cm<sup>3</sup> and was also provided with two resistance thermometers *Th* of platinum and phosphorbronze respectively covered by a radiation screen *D*. The inner parts of the apparatus were surrounded by a removable vacuumtight copper covering *E*. In order to improve the thermal contact of the wire with *A*, hydrogen or helium to a low pressure was brought into the apparatus.

The helium thermometer was connected to a mercury manometer through a capillary *C* the lower part of which was of contracid. The thermometer was filled with helium to such an amount that the pressure at the normal boiling point of helium was 66 mm Hg. Thus it could be used down to 2° K. The highest temperature for which it was used was 17° K. The helium thermometer was calibrated by measurements of the vapour pressure in the cryostat for two helium pressures and one hydrogen pressure. All measurements with the helium thermometer were performed by phil. nat. docts. A. BIJL.

The wire of the phosphorbronze thermometer was taken from the same spool as the thermometers investigated by KEESOM and VAN DEN ENDE<sup>1)</sup>. Its resistance at 0° C was  $R_0 = 13.13$  ohm and the course of the ratio  $R : R_0$ , which was determined at a number of different vapour pressures in the helium cryostat, agreed very nearly with that found by KEESOM and VAN DEN ENDE.

The platinum thermometer (resistance at 0° C 5.7745 ohm) was as a rule calibrated in each measuring series at four temperatures within the range of liquid hydrogen and several times also within the range of liquid oxygen. Any change of the thermometers with the time beyond the limits of the experimental errors was not observed. For the accuracy of the determination of the temperature in the range between liquid hydrogen and liquid oxygen it was fortunate that this thermometer very nearly followed the thermometer *Pt-23'-1915*, calibrated with great accuracy by Miss VAN DER HORST, KAMERLINGH ONNES and TUYN<sup>2)</sup>. As a matter of fact the following interpolation formula was, within the limits of errors, found to be valid

$$\frac{R}{R_0} = \left( \frac{R}{R_0} \right)_{Pt-23'-1915} + \frac{0.008832}{T}.$$

§ 3. Results for *Pb* and *Sn*. Measurements on *Pb* and *Sn* were of special interest as they ought to show how supraconducting metals behave thermo-electrically below and in the neighbourhood of the critical temperature. The only statement as to the thermo-electric properties of supra-

<sup>1)</sup> These Proceedings 32, 1171, 1929, Comm. Leiden №. 203c.

<sup>2)</sup> Cf. H. KAMERLINGH ONNES and W. TUYN, Comm. Leiden Suppl. №. 58.

conducting metals is an observation of MEISSNER<sup>1)</sup> that a thermo-couple of *Pb* and *Sn* at temperatures where the two metals are supraconducting gives no thermo-electromotive forces above the errors of observation. As however the thermo-electromotive forces for many thermo-couples may be

TABLE I.

Thermoelectric force in microvolt per degree against silveralloy-normal.					
<i>Pb<sub>31</sub></i>			<i>Sn<sub>31</sub></i>		
°K	e × 10 <sup>6</sup>	°K	e	°K	e × 10 <sup>6</sup>
1.70	0.00 ± 0.01	24.0	1.11	4.83	-0.025
3.00	-0.02 ± 0.02	24.0	1.11	5.17	0.03
3.84	-0.01 ± 0.01	27.2	1.14	5.42	0.04
5.22	0.00	33.4	1.16	7.72	0.10
5.73	-0.01	30.5	1.15	9.09	0.14
5.88	0.01	31.5	1.17	10.1	0.21
8.20	0.17	36.1	1.18	10.6	0.20
9.17	0.30	36.7	1.18	11.3	0.26
9.72	0.36	36.9	1.18	12.5	0.33
9.96	0.42	42.5	1.22	13.3	0.41
9.96	0.44	42.6	1.22	17.3	0.70
11.7	0.72	43.2	1.22	24.0	1.05
11.8	0.74	48.0	1.22	30.3	1.32
16.9	0.97	48.0	1.22	36.7	1.49
17.3	0.98	65.9	1.19	42.7	1.65
17.3	0.99	84.1	1.26	47.2	1.76
21.0	1.09	93.8	1.31	58.9	1.80
22.6	1.09			67.8	1.85
				79.1	1.98
				86.2	1.90
				94.2	1.97
				102.6	2.03
				275.4	2.43

<sup>1)</sup> W. MEISSNER, Zeitschr. für die ges. Kälteindustrie **34**, 197, 1927.

small at these low temperatures, it does not appear to what extent this result is characteristic for the supraconductors.

Our results for  $Pb$  and  $Sn$  are put together in table I. Fig. 2 shows the thermo-electric force per degree below  $50^{\circ}$  K and Fig. 3 gives the directly measured e.m.f. between  $4.236^{\circ}$  K and the temperature taken as abscissa, for  $Pb$ , from measurements on both sides of the critical point.

Before we discuss these results we might point out, that we have, from

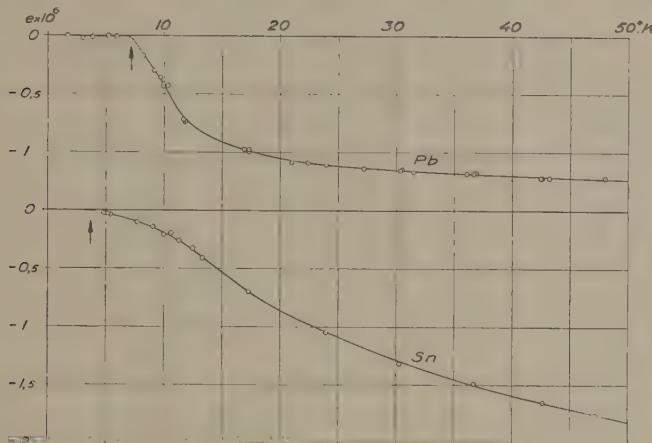


Fig. 2.  
Thermo-electric force in volt per degree for  $Pb_{31}$  and  $Sn_{31}$ .  
Against silveralloy-normal.

measurements of different alloys in combination with  $Pb$ , found that the additivity law for the thermo-electric force is valid also for the metals in the supraconducting state.

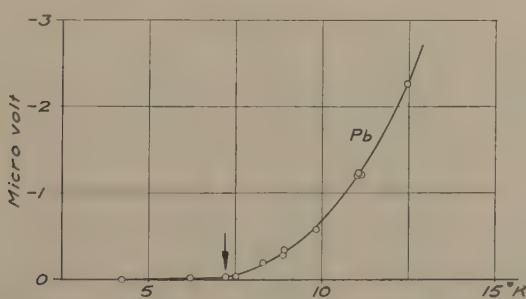


Fig. 3.  
E. m. f. for  $Pb_{31}$  against silveralloy-normal. Cold junction  $4,236^{\circ}$  K.

Further is to be mentioned that the fact that our normal has an exceedingly small thermo-electric force against  $Pb$  in the supraconducting state may be looked upon as a mere chance, other alloys having given big thermo-electric forces against  $Pb$  at the same temperatures.

The behaviour of *Pb* at the critical point is seen from the measurements against the normal. It appears that the thermo-electric force per degree (*e*) is continuous at the critical point, but that there is a rapid change in the derivative  $de/dT$  and thus also in the difference of the THOMSON-effects ( $\sigma$ ) calculated from the THOMSON-formula

$$\sigma_{Pb} - \sigma_{norm.} = T \frac{de}{dT} \dots \dots \dots \quad (1)$$

As no such change is found at this temperature in the curves for other metals in combination with the normal, it is obvious that the rapid change is in the THOMSON-heat of *Pb*.

To make clear the behaviour of *Sn* at the critical point we suitably discuss the thermo-electric forces of the combination *Sn—Pb* (which are nearly the same as for the combination of *Sn* with the normal). Our measurements reach down to the critical point, but because of an unfavorable incident we got no measurements below this point. At lower temperatures the couple *Sn—Pb* was, as mentioned, investigated by MEISSNER, who states the thermo-electric force to be zero though without any indication as to the accuracy of his measurements. As we have, however, by approaching the critical point from above, found the thermo-electric force per degree to approach to zero with an approximation of a couple of hundredths of a microvolt per degree, we think we are justified in accepting from this and from MEISSNER's statement that the thermo-electric force is really zero below the critical point.

In this case the curve for *Sn* in Fig. 2 below the critical point must nearly follow the axis and so it appears that there is a rapid change in  $de/dT$  and  $\sigma$  for *Sn* also.

As to the THOMSON-effect we first conclude, that the difference

$$\sigma_{Sn} - \sigma_{Pb} = T \frac{de}{dT} \dots \dots \dots \quad (2)$$

calculated from the thermo-electric force per degree (*e*) of the couple *Sn—Pb* is zero, when both metals are in the supraconducting state. As the temperature rises this difference first gets a rapid change to the negative side of about 0.1 microvolt per degree at the critical point of *Sn* and then a new rapid change to the positive side of about 1 microvolt per degree at the critical point of *Pb*. The THOMSON-effects thus have quite different values for *Sn* and *Pb* above the critical points and common values at all temperatures below the critical point of *Sn*. As such common values should be very surprising less they were zero, and as the NERNST theorem predicts the THOMSON-effect to be zero at the absolute zeropoint it seems to be little doubt, that the THOMSON-effect does in fact at the critical temperatures rapidly fall from finite values to zero. Whether this fall is abrupt, as seems probable, or continuous in a small interval of temperature, must be left to further investigations.

*Summary.*

Thermo-electric forces per degree were measured, for lead down to  $1.7^{\circ}$  K, for tin down to  $4.8^{\circ}$  K, in both cases against a silver-alloy wire.

The authors conclude from those measurements that the thermo-electric force per degree for a couple supraconducting lead-silveralloy is small. From their measurements on the combination lead-tin together with MEISSNER's statement they admit that the thermo-electric force for supraconducting lead-supraconducting tin is zero.

For both metals there is a rapid change in  $de/dT$  and hence in the THOMSON-heat at the temperatures where the metals become superconductive. The authors conclude that the THOMSON-effect at the critical temperature rapidly falls from finite values to zero.

---

**Astronomy.—Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.**  
 V. *S Ursae majoris*. Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

Instrumente: *S* und *R*. Die Beobachtungen wurden alle auf *R* reduziert; die Reduktion *R*—*S* beträgt —0<sup>m</sup>.18. Spektrum *Se* (*Harv. Ann.* 79 S. 172). Gesamtzahl der hier zu besprechenden Beobachtungen 751 (von 2416799 bis 2426490).

Karte: HAGEN, *Atlas Stell. var. Series III*.

TABELLE I. Vergleichsterne.

	BD	Sp.	HAGEN	St.	HA 37	HA 74	H
c	+ 61°.1307	K0	5	54.1	7. <sup>m</sup> 38	7. <sup>m</sup> 18	7. <sup>m</sup> 31
d	61.1319	K2	3	52.5	7.60	7.33	7.48
e	60.1416	A3	—	49.1	7.87	8.01	7.84
d	61.1310	G0	6	44.2	8.40	8.50	8.36
e	61.1311	—	8	40.5	8.81	8.87	8.76
f	61.1314	—	9	33.5 <sup>5</sup>	—	(10.06)	9.50
g	61.1318	—	13	30.0	10.10	10.15	9.87
h	—	—	16	24.1	10.74	10.90	10.48
j	—	—	19	21.1	—	—	10.80
k	—	—	22	17.7	10.93	11.23	11.16
l	—	—	23	12.6	—	—	11.70
m	—	—	26	8.0	11.72	11.93	12.18
p	—	—	28	4.2 <sup>5</sup>	(11.94)	12.42	12.56
q	—	—	30	0.0	(12.43)	12.94	13.03

Das Spektrum der dritten Kolumne wurde den *Harv. Ann.* 95 entnommen. Der Stern *l* fehlt in HAGEN's *Series IV*, sowohl im Verzeichnisse wie auch auf der Karte. Stern *c* kommt in der PD vor: 7<sup>m</sup>.45 WG, oder



LIST OF THE CASES OF RHINOSCLEROMA.

Nº.	NAME AND SEX	AGE	TRIBE	DWELLINGPLACE	PLACE AND DATE OF INFECTION	DURATION	LOCALISATION	DIAGNOSIS			REMARKS
								BACT.	HISTOL.	CLINIC.	
1	woman	± 45 50	Battak emi- grated to Asahan	Tandjong-Balei Asahan, Sumatra	Probable the Battak- district. Centr. Su- matra 1915?	at least 15 years	nose, upper-lip, palate	not cultivated; typical bact. in the micr. sections	+	+	See: Geneesk. Tijdschrift v. Ned. Ind., 1919, Vol. 59, p. XXV. Transact. 4th Congress Far East Ass. of Trop. Med. 1921 Vol. II, p. 269.
2	woman	± 40	Probable of Battak origin	Asahan, village Simpang-Ampat	Battak-district or contiguous part of Asahan 1920?	at least 5 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1924 Vol. 64, p. XLIII. 1923.
3	woman Pekenaken	± 35 — 40	Karo-Battak	Battak-Highlands, village Boelan-Djahé	Battak-district 1920?	at least several years	nose	not cultivated; bact. in the micr. sections	+	+	Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1924 Vol. 64, p. LXXIII. 1924.
4	woman	± 30	Battak	Battak-Highlands, Tiga Ras	" " 1921?	at least several years	nose, upper-lip	not cultivated	no excision	+	Arch. f. Schiffs- & Tropenhyg. Beihefte Bnd. 29 (1925), p. 360 (there are described cases 1—4).
5	woman	± 35 — 40	Javanese!	Tandjong Bringin Langkat	Lived already 15 years at Sumatra. 1912?	at least 15 years	nose, upper-lip, palate, lachrymal ducts	+	+	+	Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1927 Vol. 67, p. CXVI. 1927.
6	woman Goepoeang	± 40	Battak	Simelungun	Battak-district 1921	6 years	nose	+	+	+	Gen. Tijdschr. v. N. I. 1928 Vol. 68, p. LXXXII. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. '28, I, p. 3105 (C. 5—6). 1927.
7	man	± 30	"	Battak-district	" " 1920?	several years	nose, upper-lip, right lachrymal duct	not cultivated	no excision	+	Cases 1—7 are described in the thesis of Dr. DE MOOR: Het Rhinoscleroma in het bijz. in de Tropen. 1929. Amsterdam. 1923.
8	woman Moina	35	Toba-Battak	Simelungun	" " 1925	6 years	nose, palate	+	+	+	Ned. Tijdschr. v. Geneesk., 1931, IV, p. 5472.
9	woman Dortiana	30	" "	"	" " 1920	10 years	nose	+	+	+	Intimate friend of No. 8. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, IV, p. 5472.
10	man Oeloeng	43	" "	"	Asahan 1915?	15 years	nose	+	no excision	+	Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, IV, p. 5472. The mother has had the same disease.
11	man Ladjang	± 30	" "	Isle of Samosir in lake Toba	Samosir 1920?	several years	nose, upper-lip	+	+	+	Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, IV, p. 5472.
12	man Ami ni Hapiling	± 40	" "	" "	" 1927	4 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Not yet described.
13	man Jonathan Sinagar	40	" "	" "	" 1928?	3 years	nose, upper-lip	+	+	+	Not yet described.
14	man Hapal Pasariboe	25	" "	Limbong on the shore of lake Toba near Samosir	Limbong 1928?	3 years	nose	+	+	+	Not yet described.
15	man Ama ni Paroema	± 50	" "	" "	" 1929?	2 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Not yet described. See plate I.
16	man Tanna Limbong	± 28	" "	" "	" 1928	3 years	nose, upper-lip	+? culture mixed with proteus	+	+	Not yet described. Brother of No. 27.
17	woman Karolina Goerning	± 20	" "	Isle of Samosir	Samosir 1921	10 years	nose, upper-lip	+	+	+	Not yet described. Daughter of No. 22. Sister of No. 23.
18	man Ami ni Lehem	± 50	" "	" "	" 1923	at least 8 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Not yet described. Exulcerated, much retraction of the scars, great likeness to Gangosa. Plate II.
19	man Ama Radja Mira	± 35	" "	" "	" 1926	at least 4 years	nose, upper-lip, dacryocystitis, right side	+	+	+	Not yet described.
20	man Kleiophas	± 38	" "	" "	" 1930	8 years	nose, upper-lip	+	+	+	Not yet described.
21	woman Nansekka	± 35	" "	" "	" 1923	7½ years	nose	+	+	+	Not yet described. Niece of No. 28.

THE FOLLOWING CASES ARE NOT VERIFIED IN THE LABORATORY, BUT MOST PROBABLE ALSO RHINOSCLEROMA.

22	woman Gotang Boroe	± 50	Toba-Battak	Isle of Samosir	Samosir 19 ?	several years	nose, wings and septum infiltrated	?	no excision	+?	Not yet described. Mother of No. 17 and 23.
23	man, Lakanoes Goerning	± 22	" "	" "	" 1930 ?	1/2 year	nose, septum enlarged	?	"	+?	Complement-fixation with Rhinoscler.-Antigen pos. Wassermann neg. Kahn neg. Brother of 17, son of Nr. 22.
24	man Perhaling	± 40	" "	" "	" 1928 ?	several years	nose, hard and chron. swelling of top, wings, septum	?	"	+	
25	woman Kornela	± 25	" "	Saboeian on the shore of lake Toba near Samosir	Saboeian 1927 ?	4 years	nose, infiltration of the septum and the wings	?	"	+	
26	woman Teresiana	± 30	" "	Isle of Samosir	Samosir 1928 ?	± 2 years	nose, infiltration and clacatrisation of the wings	?	"	+	
27	man, Marinoes	± 25	" "	Limbong	Limbong 19 ?	?	nose, septum	—	"	+?	Brother of No. 16. (Tanna Limbong).
28	man, Ama Rhoelalan	± 45	" "	Isle of Samosir	Samosir 19 ?	?	nose, septum and wings	—	"	+	Uncle of No. 21. (Nansekka).

$7^m.37$  im System der HP. Die Stufenskala bezieht sich auf die Helligkeit  $10^m.0$ ; der Stufenwert ist  $0^m.106$ . Die Sterne  $h$  bis  $m$  wurden viermal an die Sichtbarkeitsgrenze von  $S$  angeschlossen; für  $k$  folgt daraus die allerdings sehr unsichere Helligkeit  $10^m.85$ . Der Anschluss der Stufenskala an die photometrischen Größen ist diesmal sehr unbefriedigend. Der Wert  $10^m.06$  von  $f$  aus *Harv. Ann.* 74 musste unberücksichtigt bleiben, so wie auch die Größen von  $p$  und  $q$  aus HA 37, welche  $0^m.5$  heller sind als die Angaben aus HA 74.

Es liegen 98 Schätzungen der Farbe vor, welche zum grössten Teil in den Jahren 1905 bis 1911 angestellt wurden. Aus den Tabellen IIa und IIb geht hervor, dass sich die Farbenauffassung weder mit der Zeit noch mit der Helligkeit erheblich geändert hat; das allgemeine Mittel ist  $3^m.20$ .

TABELLEN IIa und IIb. Farbenschätzungen.

Zeitraum	$m$	Farbe	Grösse	$m$	Farbe
<sup>241</sup> 6944—7266	12	<sup>c</sup> 3.58	<sup>m</sup> 7.47	12	<sup>c</sup> 2.75
7273—7475	12	3.29	7.67	12	3.21
7480—7690	12	2.54	7.85	12	3.54
7698—7921	12	2.79	7.96	12	3.25
7933—8149	12	2.63	8.04	12	3.37
8159—8618	12	2.88	8.28	12	3.08
8657—9799	12	3.79	8.77	13	3.00
<sup>242</sup> 9846—6092	14	4.00	9.56	13	3.58
	98	3.20		98	3.21

Die Figur 1 enthält die Beobachtungen, alle auf  $R$  reduziert. Die erste Schätzung ist leider unrichtig angegeben und soll 2416799 gelesen werden. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 277 Plus-, 289 Minuszeichen, 185 Nullwerte, 237 Zeichenfolgen, 328 Zeichenwechsel. Bei den 5 bis jetzt behandelten Sternen ist die Gesamtzahl der Zeichenfolgen 1172, die der Zeichenwechsel 1321. Das bedeutet, dass ich die Kurven vielleicht noch etwas glätter ziehen können, ohne den Beobachtungen Gewalt anzutun.

Ein Einfluss des Mondscheines auf die Helligkeitsschätzung ist kaum bemerkbar. Es verteilen sich auf 256 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt: 99 Plus-, 76 Minuszeichen, 90 Nullwerte.

Die Tabelle III enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima  $m$  und der Maxima  $M$ .

TABELLE III.

Minima <i>m</i>						Maxima <i>M</i>				
<i>E</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>
-22	—	—	—	—	—	241 6868	7. <sup>m</sup> 8	6846	+22	+19
-21	241 6979	12.2	6960	+19	+13	7087	7.2	7071	+16	+10
-20	7193	12.0	7185	+ 8	0	7306	7.6	7296	+10	+ 2
-19	7422	11.2	7410	+12	+ 2	7531	7.3	7521	+10	0
-18	7646	11.8	7635	+11	0	7759	7.3	7746	+13	+ 2
-17	7870	12.4	7860	+10	- 2	7994	7.4	7971	+23	+11
-16	8102	12.5	8085	+17	+ 4	8203	7.5	8196	+ 7	- 6
-15	8320	11.5	8310	+10	- 3	8433	7.5	8421	+12	- 1
-14	8535	11.0	8535	0	-13	8660	7.7	8646	+14	+ 1
-13	8762	11.9	8760	+ 2	-10	8880	7.9	8871	+ 9	- 3
-12	8984	12.0	8985	- 1	-12	9108	7.6	9096	+12	+ 1
-11	9217	12.5	9210	+ 7	- 3	9335	7.8	9321	+14	+ 4
-10	9438	11.8	9435	+ 3	- 5	9540	7.8	9546	- 6	-14
-9	9667	12.1	9660	+ 7	+ 1	9786	7.9	9771	+15	+ 9
-8	9897	11.9	9885	+12	+ 9	9990	7.9	9996	- 6	- 9
-7	242 0103	11.0	0110	- 7	- 8	242 0227	7.8	0221	+ 6	+ 5
-6	0329	11.6	0335	- 6	- 4	0438	8.0	0446	- 8	- 6
-5	0552	12.1	0560	- 8	- 3	0679	7.8	0671	+ 8	+13
-4	0775	11.8	0785	-10	- 3	0890	7.7	0896	- 6	+ 1
-3	1008	12.3	1010	- 2	+ 8	1117	7.9	1121	- 4	+ 6
-2	1228	11.8	1235	- 7	+ 5	1320	7.9	1346	-26	-14
-1	1454	11.7	1460	- 6	+ 8	1542	7.9	1571	-29	-15
0	1672	11.4	1685	-13	+ 2	1778	7.7	1796	-18	- 3
+1	1890	11.7	1910	-20	- 4	2006	7.8	2021	-15	+ 1
+2	2110	12.1	2135	-25	- 8	2236	7.9	2246	-10	+ 7
+3	2342	12.4	2360	-18	- 1	2457	8.1	2471	-14	+ 3
+4	2572	11.7	2585	-13	+ 4	2658	7.9	2696	-38	-21
+5	2796	12.1	2810	-14	+ 2	2900	7.8	2921	-21	- 5
+6	3008	12.0	3035	-27	-12	3142	7.9	3146	- 4	+11

TABELLE III (Fortsetzung).

E	B	Minima m					Maxima M				
		v	R	B-R	B-F		B	v	R	B-R	B-F
+ 7	3238	12.2	3260	-22	- 8	3363	7.7	3371	- 8	+ 6	
+ 8	3460	11.7	3485	-25	-13	3584	7.7	3596	-12	0	
+ 9	3704	12.2	3710	- 6	+ 4	3823	8.0	3821	+ 2	+12	
+10	3939	11.6	3935	+ 4	+11	4023	7.8	4046	-23	-16	
+11	4162	11.7	4160	+ 2	+ 7	4241	7.8	4271	-30	-25	
+12	4379	11.4	4385	- 6	- 4	4490	7.9	4496	- 6	- 4	
+13	4605	11.9	4610	- 5	- 6	4708	7.9	4721	-13	-14	
+14	4829	11.6	4835	- 6	- 9	4940	7.9	4946	- 6	- 9	
+15	5065	12.1	5060	+ 5	- 1	5180	7.9	5171	+ 9	+ 3	
+16	5288	12.1	5285	+ 3	- 5	5413	7.8	5396	+17	+ 9	
+17	5521	11.9	5510	+11	+ 1	5623	7.9	5621	+ 2	- 8	
+18	5749	11.5	5735	+14	+ 3	5843	7.9	5846	- 3	-14	
+19	5971	11.7	5960	+11	- 1	6082	7.7	6071	+11	- 1	
+20	6207	12.5	6185	+22	+ 9	6311	7.7	6296	+15	+ 2	
+21	6439	12.9	6410	+29	+16	(6564)	(8.2)	6521	+43	+30	
		11.90		± 6			7.78			± 8	

Das Maximum 2426564 wurde nach Abschluss der Reduktion erhalten.  
Die Spalte R wurde mit den einfachen Elementen:

$$2421685^d + 225^d E \text{ (für die Minima)}$$

und  $2421796^d + 225^d E \text{ (für die Maxima)}$

gerechnet.

Die übrigbleibenden  $B - R$  sind sehr gross und zeigen einen ausgeprägt systematischen Charakter; es wurde für Maxima und Minima zusammen auf graphischem Wege ein Sinusglied abgeleitet, und die definitiven Elemente F lauten dann:

$$\begin{aligned} \text{Minimum: } & 2421689^d / + 225^d E + 15^d \sin 10^\circ (E + 6). \\ \text{Maximum: } & 2421800^d / \end{aligned}$$

Auf eine genauere Rechnung habe ich verzichtet.

PRAGER's Katalog für 1932 gibt den Periodenwert  $227^d.4$ , und das aus sämtlichen von mir seit d. J. 1905 in den *Astr. Nachr.* mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima abgeleitete allgemeine Mittel ist  $225^d.0$ .

Da die Berücksichtigung des Sinusgliedes die Quadratsummen für die Minima und die Maxima von 7444 und 11684 auf 2179 bzw. 4977 herabdrückt, kann die Formel  $F$  für den hier besprochenen Zeitraum als gut verbürgt gelten. Weitere Schlüsse möchte ich aber nicht ziehen. Für die Jahre 1860 bis 1904 scheinen ja ganz andere Elemente zu gelten (s. G. und L. I S. 345). Das von CHANDLER abgeleitete Sinusglied mit einer Periode von 67 Perioden und einer Amplitude von  $35^d$  verträgt sich aber offenbar gar nicht mit meinen Epochen. Vielleicht wird man erst nach viel längerer Zeit das wahre Gesetz des Lichtwechsels abzuleiten im Stande sein, es sei denn, dass dessen Charakter sich sprungweise ändern sollte. Epochens- oder Periodensprünge wie sie TURNER bei *S Ursae Majoris* annimmt (*M.N.R.A.S.* 80, 486) sind in meinen Beobachtungen nicht nachzuweisen.

Die extremen Werte des Lichtwechsels sind :

$$\begin{aligned} \text{Minimum: } v &= 11^m.90 \pm 0^m.060 \\ \text{Maximum: } v &= 7.78 \pm 0.028 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{m.F.}) \end{array} \right.$$

Die Amplitude beträgt somit  $4^m.12$ . Sowohl beim Minimum wie beim Maximum scheinen die Abweichungen vom Mittelwert regellos aufzutreten.

Wie bei *W Herculis* und *R Trianguli* wurde wieder der mittlere Verlauf der Lichtkurve in der Nähe der beiden Hauptphasen durch Ablesung der Helligkeit für je  $10^d$  abgeleitet.

Die beiden Teilkurven schliessen sich fast genau an einander an (s. die Figur 2), und geben zusammen den in der Tabelle IV mitgeteilten Verlauf der mittleren Kurve *B*.

TABELLE IV. Die mittlere Kurve.

Phase	$v$	Phase	$v$	Phase	$v$	Phase	$v$	Phase	$v$
$-60^d$	$9.11^m$	$-10^d$	$11.69^m$	$+40^d$	$9.46^m$	$+90^d$	$8.00^m$	$+140^d$	$8.24^m$
$-50$	$9.55$	$0$	$11.90$	$+50$	$8.96$	$+100$	$7.85$	$+150$	$8.55$
$-40$	$10.05$	$+10$	$11.69$	$+60$	$8.61$	$+110$	$7.77$	$+160$	$8.93$
$-30$	$10.62$	$+20$	$10.93$	$+70$	$8.39$	$+120$	$7.84$	$+170$	$9.33$
$-20$	$11.18$	$+30$	$10.09$	$+80$	$8.19$	$+130$	$8.00$		

Eine Wendepunktskurve konnte nicht bestimmt werden da, wie aus der Fig. 1 ersichtlich, das Auftreten eines dem Maximum vorangehenden deutlich ausgeprägten Stillstandes oder sekundären Maximums bei diesem Stern Ausnahme ist. Andererseits tritt eine buckelartige Erscheinung doch auch wieder so häufig auf, dass sie den Verlauf der mittleren Lichtkurve *B* (s. die Fig. 2) sehr erheblich beeinflusst; und eine genaue Betrachtung der Fig. 1 lehrt sogar, dass der Stern bei den meisten Aufstiegen scheinbar

eine Störung erleidet, welche mit den früher bei *T Cassiopeiae* und *T Cephei* beschriebenen Erscheinungen eine gewisse Ähnlichkeit besitzt. Bei den Maxima 2417759, 7994, 8433, 8660, 9108, 9335, 2420227, 1117, 3363, 3584 und 4241 ist diese Störung so deutlich ausgeprägt, dass man förmlich genötigt wird, die Kurve von derselben zu befreien. Das hat mir dann den Mut verliehen die Arbeitshypothese aufzustellen, dass bei *S Ursae Majoris* sämtliche Maxima einer Störung unterliegen.

Allerdings bleibt die Höhe der neuen, ungestörten Maxima etwas unsicher; die Epochen liegen aber ziemlich sicher fest. Die Tabelle V

TABELLE V. Ungestörte Maxima.

<i>E</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>
-22	241 6861	m 7.3	6838	+23	+20	0	242 1780	m 7.0	1788	-8	+7
-21	7072	6.8	7063	+9	+3	+1	2001	7.1	2013	-12	+4
-20	7293	6.7	7288	+5	-3	+2	2217	7.2	2238	-21	-4
-19	7528	6.7	7513	+15	+5	+3	2458	7.3	2463	-5	+12
-18	7749	6.5	7738	+11	0	+4	2667	7.1	2688	-21	-4
-17	7982	6.4	7963	+19	+7	+5	2900	7.2	2913	-13	+3
-16	8197	6.7	8188	+9	-4	+6	3119	7.0	3138	-19	-4
-15	8409	6.8	8413	-4	-17	+7	3348	6.9	3363	-15	-1
-14	8646	6.8	8638	+8	-5	+8	3567	7.0	3588	-21	-9
-13	8867	7.0	8863	+4	-8	+9	3820	7.2	3813	+7	+17
-12	9090	7.0	9088	+2	-9	+10	4025	7.0	4038	-13	-6
-11	9325	7.0	9313	+12	+2	+11	4260	7.0	4263	-3	+2
-10	9538	7.0	9538	0	-8	+12	4474	7.0	4488	-14	-12
-9	9770	7.0	9763	+7	+1	+13	4711	7.0	4713	-2	-3
-8	9992	7.1	9988	+4	+1	+14	4940	7.2	4938	+2	-1
-7	242 0206	7.0	0213	-7	-8	+15	5179	7.1	5163	+16	+10
-6	0429	7.0	0438	-9	-7	+16	5392	7.0	5388	+4	-4
-5	0656	6.9	0663	-7	-2	+17	5628	7.1	5613	+15	+5
-4	0875	7.2	0888	-13	-6	+18	5846	7.0	5838	+8	-3
-3	1103	7.0	1113	-10	0	+19	6069	7.0	6063	+6	-6
-2	1329	7.0	1338	-9	+3	+20	6311	7.0	6288	+23	+10
-1	1548	7.1	1563	-15	-1	+21	(6540)	7.2	6513	+27	+14
							6.99				± 6

enthält eine Zusammenstellung dieser ungestörten Maxima nebst einer Vergleichung mit den Elementen

$$R: 2421788^d + 225^d E$$

und  $F: 2421792 + 225 E + 15^d \sin 10^\circ (E + 6)$ .

Das grösste Licht ist im Mittel  $6^m.99 \pm 0^m.23$  (m.F.).

Auch die mittlere Kurve  $A$  des ungestörten Maximums schliesst sich der Kurve des Minimums wieder gut an (s. Fig. 2). Für die Schiefe der ungestörten Kurve findet man

$$\frac{M - m}{P} = 0.46.$$

Schliesslich wurde die Differenzkurve  $C = A - B$  gebildet welche hier, im Gegensatz zu  $T$  Cassiopeiae und  $T$  Cephei, einen asymmetrischen

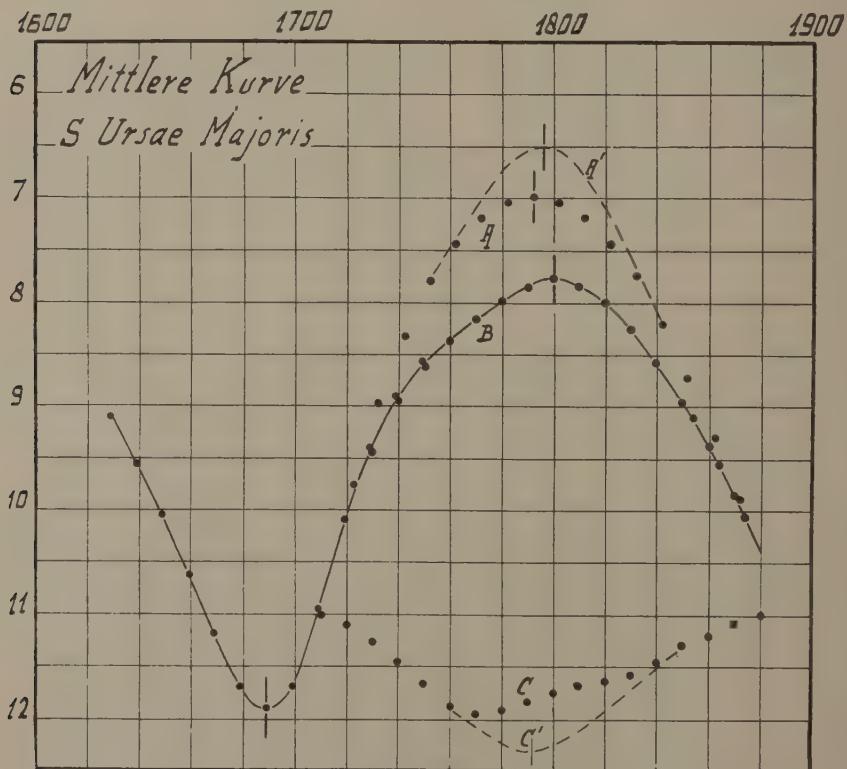


Fig. 2.

Verlauf zeigt. Ich bemerke aber dass, wenn man die Kurve  $C$  in eine symmetrische Kurve  $C'$  transformiert, und nun umgekehrt eine ungestörte Kurve  $A'$  als die Summe von  $B$  und  $C'$  bildet, diese spitzere Kurve, deren

Maximum 2421796 bei  $6^m.5$  statt  $7^m.0$  liegt, also  $0^m.5$  höher, sich den Beobachtungen ebensogut wie A anschliesst, vielleicht sogar noch etwas besser, denn ein Blick auf Fig. 1 tut dar, dass bei der Mehrzahl der ungestörten Maxima eine Erhöhung von  $0^m.5 = 1.5$  mm der Kurve einen vielleicht noch natürlicheren Verlauf erteilt. Ich möchte die Kurve A' eher als A als den richtigen ungestörten Verlauf der Helligkeit auffassen: dann erleidet der Stern beim Aufstieg eine symmetrische Verfinsterung deren Minimum, zu  $1^m.30$ , auf 2421792 fällt, also 4 Tage vor dem (neuen) ungestörten Maximum; die Verdunkelung beraubt den Stern von 70 % seines Lichtes. Die neue Schiefe wird 0.48.

### Zusammenfassung.

Aus 751 in den Jahren 1904 bis 1931 (2416799 bis 2426490) angestellten Beobachtungen von *S Ursae Majoris* sind die folgenden Elemente des Lichtwechsels abgeleitet worden:

$$\begin{aligned} \text{Minimum: } & 2421689^d \\ \text{Maximum: } & 2421800 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} + 225^d E + 15^d \sin 10^\circ (E + 6); \\ v = 11^m.90 \\ v = 7.78 \end{array} \right\}$$

Amplitude = 4.12

Der Stern scheint beim Aufstieg eine Verdunkelung von  $1^m.30$  zu erfahren, deren Minimum auf 2421792 fällt.

*Utrecht, Dezember 1931.*

### ERRATA in Proc. Vol. XXXIV.

- Page 112, line 3, read: bezeichnenden;
- .. 113, .. 17, read: bis  $7^m.5$ ;
- .. 113, .. 23, read: graphischem;
- .. 657, .. 28, read: beim Maximum;
- .. 945, .. 8, read: den Periodenwert.

**Chemistry.** — *Osmosis in binary systems in which two membranes. I.* By  
F. A. H. SCHREINEMAKERS.

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

We take an osmotic system :

$$\text{inv. } L_1(W + X) \left|_{\omega_1}^{M_1} \right. L(x) \left|_{\omega_2}^{M_2} \right. \text{inv. } L_2(W + X) \dots \dots \quad (1)$$

in which two membranes  $M_1$  and  $M_2$  with the surfaces  $\omega_1$  and  $\omega_2$ ; on the left side of  $M_1$  and on the right side of  $M_2$  is an invariant liquid, containing the substances  $W$  (water) and  $X$ . In order to concentrate our thoughts we assume that  $L_1$  has a smaller  $X$ -amount than  $L_2$ ; if in fig. 1 we represent  $L_1$  and  $L_2$  by the points  $i_1$  and  $i_2$  in the well-known way, then  $i_1$  must be situated, therefore, on the left side of  $i_2$ .

If we now bring a liquid  $L$  with an arbitrary composition

$$x \text{ quant. } X + (1 - x) \text{ quant. } W \dots \dots \dots \quad (2)$$

between the two membranes this liquid will continue to change until a stationary state occurs, which we represent by :

$$\text{inv. } L_1(W + X) \left|_{\omega_1}^{M_1} \right. \text{stat. } L(x) \left|_{\omega_2}^{M_2} \right. \text{inv. } L_2(W + X) \dots \dots \quad (3)$$

The osmosis is not done then, however, for the substances  $W$  and  $X$  continue to pass all the time through the two membranes; this, however now takes place in such a way that the liquid  $L$  does not change its composition any more; the quantity of this liquid however generally does change still.

If we imagine the membrane  $M_2$  of system (1) impermeable, then we have only to consider the system :

$$\text{inv. } L_1(W + X) \left|_{\omega_1}^{M_1} \right. L(x) \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

We shall now assume that no stationary point occurs in this system so that the variable liquid  $L$  changes normally<sup>1)</sup>; this means that during the osmosis this variable liquid in fig. 1 will always move towards point  $i_1$ , no

<sup>1)</sup> Comp.: These Proceedings **34**, 1282 (1931).

Until now we have only found examples of a normal change in all systems investigated.

matter where this liquid  $L$  may be at the beginning of the osmosis. From this follows: if the variable liquid  $L$  is found in fig. 1 on the left side of  $i_1$  then  $L$  will move  $\rightarrow$ ; if  $L$  is found on the right side of  $i_1$  then  $L$  will move  $\leftarrow$ ; this has been indicated in fig. 1 by the three arrows of the top series.

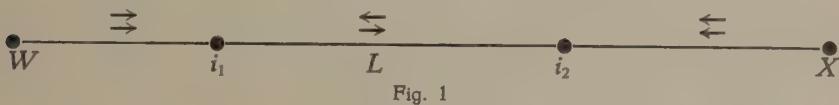
If we imagine the membrane  $M_2$  of system (1) impermeable, we get the system:

$$L(x) \begin{matrix} M_2 \\ | \\ \omega_2 \end{matrix} \text{inv. } L_2(W + X). \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

If we now assume once more that in this system no stationary point will occur either, then we find that  $L$  will now move with respect to point  $i_2$  as has been indicated in fig. 1 by the three arrows of the lowest series.

In system (1) the variant liquid  $L$  moves under the influence of the two invariant liquids. When  $L$  is found on  $W i_1$ , then the two influences coöperate to move  $L \rightarrow$ ; when  $L$  is found on  $i_2 X$ , then the two influences coöperate to move  $L \leftarrow$ .

When, however,  $L$  is found between  $i_1$  and  $i_2$ , the two influences work in opposite direction; as a matter of course we now assume that the two influences can now neutralise each other somewhere, so that liquid  $L$  will not move any more, but become stationary. Further on we shall see that this indeed happens and we shall deduce:



in fig. 1 the stationary liquid is situated between  $i_1$  and  $i_2$ ; its place depends upon the ratio  $\omega_1 : \omega_2$  of the two membranes.

For the directions in which the substances  $W$  and  $X$  flow through the membrane  $M_1$  of system (4) we can imagine four D.T.'s, viz.:

$$\begin{array}{ll} X & W \\ 1. & \leftarrow \quad \leftarrow \\ 2. & \leftarrow \quad \rightarrow \\ & \quad \quad \quad 3. \rightarrow \quad \leftarrow \\ & \quad \quad \quad 4. \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \quad \left. \right\} \dots \dots \dots \quad (6)$$

of which one, namely the incongruent one, is not possible, however; when  $L$  has a greater  $X$ -amount than  $L_1$  then N°. 3 is incongruent; when, however,  $L$  has a smaller  $X$ -amount, N°. 2 will be incongruent. Of course it depends upon the nature of the system, namely upon the nature and composition of the two liquids and the nature of the membrane, which of the three D.T.'s possible will occur. As during the osmosis liquid  $L$  continuously changes its composition, one D.T. at a certain moment of the osmosis can pass into an other.

In order to summarise the different cases, we represent the diffusion by :

$$\leftarrow a_1 \cdot X \quad \leftarrow \gamma_1 \cdot W \quad \dots \quad (7)$$

in which  $a_1$  and  $\gamma_1$  are the very small quantities of  $X$  and  $W$ , diffusing towards the left through 1 cM<sup>2</sup> of the membrane  $M_1$  between the moments  $t$  and  $t + dt$ ; if we take  $a_1$  or  $\gamma_1$  or both negative, then we get the other D.T.'s of (6).

As the membrane  $M_1$  has a surface  $\omega_1$ , the variant liquid  $L$  gives off  $\omega_1 a_1 X$  and  $\omega_1 \gamma_1 W$  in the time  $dt$ . If we represent the quantity of this liquid at the moment  $t$  by  $m$ , then it is  $m - \omega_1(a_1 + \gamma_1)$  at the moment  $t + dt$ . As this liquid now contains altogether  $mx - \omega_1 a_1$  quantities of  $X$ , it follows :

$$(dx)_1 = \frac{mx - \omega_1 a_1}{m - \omega_1(a_1 + \gamma_1)} - x = -\frac{\omega_1}{m} [a_1 - x(a_1 + \gamma_1)]. \quad \dots \quad (8)$$

or:

$$m(dx)_1 = -\omega_1 A_1 \quad \dots \quad (9)$$

in which  $(dx)_1$  represents the change in the  $X$ -amount of the var. liq.  $L$ .

Above we have seen: when liq.  $L$  of system (4) is on the left side of  $i_1$ , it moves  $\rightarrow$  so that  $(dx)_1 > 0$ ; when  $L$  is on the right side of  $i_1$ , then  $L$  moves  $\leftarrow$  so that  $(dx)_1 < 0$  [comp. the three arrows of the top series in fig. 1]. It now follows from (9) :

when the variant liquid  $L$  of system (4) is on the left side of  $i_1$ , then  $A_1 < 0$ ; when  $L$  is situated on the right side of  $i_1$ , then  $A_1 > 0$ ; when  $L$  is in  $i_1$ , then  $A_1 = 0$ .

We find these signs of  $A_1$  in the top series of fig. 2.

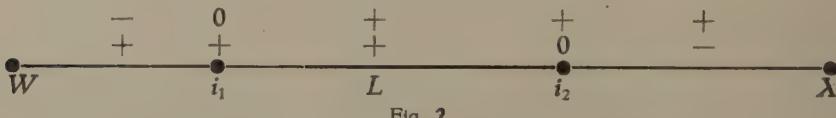


Fig. 2

Corresponding considerations also obtain for system (5). We now represent the diffusion by :

$$\leftarrow a_2 \cdot X \quad \leftarrow \gamma_2 \cdot W \quad \dots \quad (10)$$

in which  $a_2$  and  $\gamma_2$  indicate the very small quantities of  $X$  and  $W$ , now diffusing towards the left through 1 cM<sup>2</sup> of the membrane  $M_2$  in the time  $dt$ . If we now represent the change in the  $X$ -amount of the variant liquid  $L$  by  $(dx)_2$ , we find :

$$(dx)_2 = \frac{\omega_2}{m} [a_2 - x(a_2 + \gamma_2)] \quad \dots \quad (11)$$

or:

$$m(dx)_2 = \omega_2 A_2 \quad \dots \quad (12)$$

If we now take into consideration the direction in which the var. liq. moves with respect to point  $i_2$  [compare the three arrows of the lower-series of fig. 1], then it follows that  $A_2$  is positive on the left side of  $i_2$ , negative on the right side of  $i_2$  and zero in  $i_2$ . We find these signs of  $A_2$  in the lowest series of fig. 2.

If we represent by  $dx$  the change of the  $X$ -amount of the variable liquid  $L$  of system (1), then it follows from (9) and (12) :

$$mdx = m(dx)_1 + m(dx)_2 = \omega_2 A_2 - \omega_1 A_1 . . . . (13)$$

If we take into consideration the quantities of  $X$  and  $W$  the var. liq.  $L$  absorbs through the membrane  $M_2$  and gives off through  $M_1$ , we see that

$$(\omega_2 a_2 - \omega_1 a_1) X \text{ and } (\omega_2 \gamma_2 - \omega_1 \gamma_1) W . . . . (14)$$

are absorbed by liquid  $L$ . So for the change  $dm$  in the quantity of this liquid follows :

$$dm = \omega_2 (a_2 + \gamma_2) - \omega_1 (a_1 + \gamma_1) . . . . . (15)$$

If we add (13) and (15) together, after having multiplied (15) by  $x$  and if we take into consideration the values of  $A_1$  and  $A_2$ , we find :

$$m dx + x dm = \omega_2 a_2 - \omega_1 a_1 . . . . . (16)$$

It is possible to find this relation (16) also directly ; the first part namely is  $d(mx)$ , consequently the increase of the total quantity of  $X$  in the liquid  $L$  ; the second part also represents this increase as is apparent from (14).

The relations mentioned above obtain for every arbitrary moment of the osmosis of system (1) ; when, however, the var. liq.  $L$  has passed into the stationary liquid of system (3), so that its composition does not change any more,  $dx=0$ . Then it follows from (13) that

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{or} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a_1 - x(a_1 + \gamma_1)}{a_2 - x(a_2 + \gamma_2)} . . . . . (17)$$

must be satisfied, so that  $A_1$  and  $A_2$  must have the same sign.

We are able to deduce (17) in still another way. The var. liq.  $L$  namely will not change its composition any more, when the quantities of  $X$  and  $W$  absorbed or given off [comp. 14] stand in the relation of the  $X$ - and  $W$ -amount of this liquid  $L$  ; so

$$(\omega_2 a_2 - \omega_1 a_1) : (\omega_2 \gamma_2 - \omega_1 \gamma_1) = x : (1-x) . . . . . (18)$$

must be satisfied, from which (17) follows ; in this way, however, we do not find, as we found above, what signs  $A_1$  and  $A_2$  have during the osmosis.

It appears from (17) that this condition can only be satisfied when  $A_1$  and  $A_2$  have the same sign ; as fig. 2 shows that this is only the

case between the points  $i_1$  and  $i_2$ , it follows as has been deduced already above, that the stationary liquid of system (3) can only be situated between  $i_1$  and  $i_2$ ; it now appears besides, however, that  $A_1$  and  $A_2$  in system (3) are positive then. We can also deduce now:

in system (3) a stat. liq.  $L$  always exists, no matter what surfaces the membranes  $M_1$  and  $M_2$  may have;

the composition of this stat. liq. depends upon  $\omega_2 : \omega_1$  viz. on the ratio of the surfaces of the two membranes; if  $\omega_2 : \omega_1$  is small, then  $L$  is situated close to point  $i_1$  (figs. 1 or 2); if  $\omega_2 : \omega_1$  is large, then  $L$  is situated close to point  $i_2$ .

In order to deduce this we imagine the variable liquid  $L$  in fig. 2 moving from  $i_1$  towards  $i_2$ . With this movement  $A_1$  then will increase from zero up to a certain positive value, whereas  $A_2$  will decrease from a certain positive value to zero [comp. the signs in fig. 2]. From this it follows that the second part of (17) viz.  $A_1 : A_2$  will run through all values from zero up to positive infinitely large. From this it follows:

(17) always can be satisfied, no matter what value  $\omega_2 : \omega_1$  may have.

From this now follows at once what has been said above about the stat. liq. of system (3).

We now imagine in system (1) two membranes with definite surfaces  $\omega_1$  and  $\omega_2$ ; then the stat. liq.  $L$  of system (3) will have a definite composition; we imagine this liquid represented in figs. 3 and 4, in which line  $WX$  has only been partly drawn, by point  $s$ . Then the var. liq.  $L$  of system (1) will move towards this point (comp. the arrows in figs. 3 and 4) when namely it is not accidentally situated in point  $s$  at the beginning of the osmosis.

During this movement the variable liquid (as appears from 15) will be changing its quantity continuously, unless a point is situated in its way, where

$$\omega_2(a_2 + \gamma_2) = \omega_1(a_1 + \gamma_1). \quad \dots \quad (19)$$

is satisfied, so that the quantity of the variable liquid does not change in this point; we shall call such a point "a point of constant quantity".

It depends upon the nature of the liquids and of the membranes whether a similar point will occur or not occur in a given system; we shall refer to this later on, when discussing some systems examined.

When system (1) has no point of constant quantity, the quantity of the var. liq. will either increase or decrease during the entire osmosis, no matter where the variant liquid may be found at the beginning of the osmosis; the quantity of the stationary liquid then will continuously increase or decrease as well.

When, however, a point of constant quantity does occur in the system, we can distinguish several cases. In order to discuss some of these cases

we imagine this point represented by point  $c$  in the figs. 3 and 4; in order to concentrate our thoughts we assume that the quantity of the variable liquid increases on the left side of this point  $c$  and decreases on the right side of  $c$ ; this has been indicated in the figs. 3 and 4 by the signs + and -.

We now first take fig. 3. When at the beginning of the osmosis the

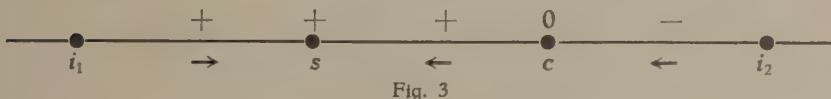


Fig. 3

variable liquid is found between  $s$  and  $c$ , its quantity will increase during the entire osmosis and this process will still go on when the liquid has become stationary in point  $s$ .

When at the beginning of the osmosis the var. liq. is found on the right side of  $c$ , its quantity will first decrease, remain constant in point  $c$  for a moment and afterwards increase from  $c$  to  $s$  where the quantity also goes on increasing continuously. So during the osmosis the quantity of the var. liq. becomes a minimum in point  $c$ .

In fig. 4 point  $c$  is situated on the left side of point  $s$ . When at the

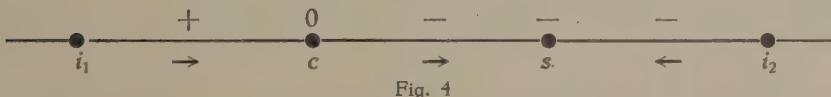


Fig. 4

beginning of the osmosis the var. liquid is found between  $c$  and  $s$  or on the right side of  $s$ , its quantity will decrease during the entire osmosis and this will still go on when the liquid has become stationary in point  $s$ .

When at the beginning of the osmosis the var. liq. is found, however, on the left side of  $c$ , its quantity will first increase, remain constant in point  $c$  for a moment and afterwards it will decrease from  $c$  to  $s$ , where the quantity goes on decreasing continuously. Consequently during the osmosis the quantity of the variant liquid becomes a maximum in point  $c$ .

We may also imagine that the points  $c$  and  $s$  of figs. 3 or 4 coincide; then  $dm=0$  and  $dx=0$  must be satisfied at the same time. With the aid of two of the three equations (13), (15) and (16) we find that (19) then must be satisfied and:

ORI

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{and} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad \dots \quad (21)$$

If we now take a definite system, so that the invariant liquids  $L_1$  and  $L_2$ , have a definite composition and the membranes a definite nature, then

$a_1$ ,  $a_2$ ,  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  are functions, containing only the composition  $x$  of the var. liq. as a variable.

It now follows from (21) that not only  $x$  but also  $\omega_2 : \omega_1$  must have a definite value. From this it appears that the points  $c$  and  $s$  of a given system can coincide only then when the ratio  $\omega_2 : \omega_1$  of the surfaces of the two membranes has a definite value.

If we now have a system, in which the points  $c$  and  $s$  do not coincide, then, as we have seen before, we are able to make them coincide by changing the ratio  $\omega_2 : \omega_1$  in such a way that (21) is satisfied; this is also possible, however, by giving an other composition to one or to both invariant liquids.

If we now represent the compositions of these inv. liquids by  $x_1$  and  $x_2$ , then  $a_1$  and  $\gamma_1$  will now be functions of  $x$  and  $x_1$ , whereas  $a_2$  and  $\gamma_2$  are functions of  $x$  and  $x_2$ ; as the equations (21) now contain three variables (viz.  $x_2$ ,  $x_1$  and  $x$ ) follows from this what has been said above.

From this it follows also that figs. 3 and 4 may pass into each other at the change in the composition of one or of both invariant liquids. We shall refer to this later on.

Above we have deduced: every arbitrary system (1) passes into a system (3), in which the stationary liquid  $L$  has a definite composition. In our further considerations we have assumed as a matter of course that only a single stat. liq. is possible; also other cases can be imagined, however.

Above we have seen: when in fig. 2 the variable liquid  $L$  of system (1) moves from  $i_1$  towards  $i_2$ , the second part of (17) [viz. the ratio  $A_1 : A_2$ ] runs through all values from 0 to  $+\infty$ . We can imagine several cases here.

1<sup>o</sup>. The value of  $A_1 : A_2$  increases continuously. We then have the case, considered until now, that only a single stat. liquid belongs to every value of  $\omega_2 : \omega_1$ .

2<sup>o</sup>. The value of  $A_1 : A_2$  first increases from 0 to a certain value  $p$ , then it decreases to  $q$  and afterwards it increases continuously to  $\infty$ . We now distinguish two cases.

a. If we take  $\omega_2 : \omega_1$  greater than  $p$  or smaller than  $q$ , then only one single stat. liq.  $L$  belongs to every value of  $\omega_2 : \omega_1$ .

b. If we take  $\omega_2 : \omega_1$  between  $p$  and  $q$ , then three quite different stat. liquids  $L$  belong to every value of  $\omega_2 : \omega_1$ .

We now imagine these three stat. liquids, which we shall call  $L(s_1)$ ,  $L(s_2)$  and  $L(s_3)$ , represented in fig. 5 by the points  $s_1$ ,  $s_2$  and  $s_3$ ; in each of these points, therefore:

$$\omega_2 A_2 - \omega_1 A_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (22)$$

is zero. It is now easy to find that (22) is positive from  $i_1$  to  $s_1$  (fig. 5) negative from  $s_1$  to  $s_2$ , positive again from  $s_2$  to  $s_3$  and at last negative

again from  $s_3$  to  $i_2$  [comp. the signs in fig. 5]. It now follows from (13) that the variable liquid will move according to the arrows in fig. 5.

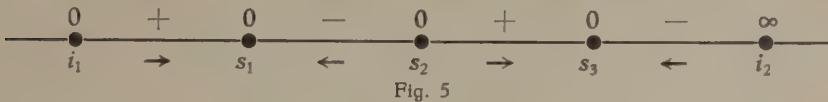


Fig. 5

If at the beginning of the osmosis the var. liq.  $L$  of system (1) is given such a composition, that it is represented at the beginning of the osmosis by a point somewhere to the left of  $s_2$  (fig. 5), then it will move during the osmosis towards  $s_1$ , where it passes into the stationary liquid  $L(s_1)$ .

When, however, the var. liq. is represented at the beginning of the osmosis by a point to the right of  $s_2$ , it will move towards point  $s_3$ , where it passes into the stat. liq.  $L(s_3)$ .

From this it also appears that the var. liq. cannot move towards point  $s_2$ . So in system (3) we can get the stat. liq.  $L(s_2)$  only then when we bring it already into system (1) at the beginning of the osmosis. This condition is unstable then however, for any small disturbance will cause this liquid  $L(s_2)$  to move towards  $s_1$  or  $s_3$ ; consequently we may leave point  $s_2$  and the stat. liq.  $L(s_2)$  out of consideration. From this it follows:

when  $\omega_2 : \omega_1$  is situated between definite limits, then it is possible that two quite different stat. liquids will be formed at the transition of system (1) into the stat. system (3); it depends upon the composition we give to the var. liq. at the beginning of the osmosis, which of these two liquids will then occur.

It is now quite easy for the reader to deduce himself that the points  $s_1$  and  $s_2$  or  $s_2$  and  $s_3$  of fig. 5 coincide at a certain value of  $\omega_2 : \omega_1$  (viz.  $p$  or  $q$ ), so that fig. 5 passes into fig. 2.

*Lab. of Inorg. Chemistry.*

*Leiden.*

(*To be continued.*)

**Mathematics. — Über Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden.** Von J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

In seiner ausgezeichneten und sehr nützlichen „History of the Theory of Numbers“ teilt Herr DICKSON mit (Teil II, S. 210), dass J. CUNLIFFE<sup>1)</sup> folgendermassen Dreiecke  $ABC$  mit rationalen Seiten  $a, b, c$  und rationalen inneren Winkelhalbierenden bestimmt hat:

Verbindet man in einem solchen Dreieck den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises mit den Berührungspunkten der Seiten, und auch mit den Eckpunkten des Dreieckes, so wird das Dreieck in drei Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten zerlegt, und in jedem dieser sechs rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete gleich dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises. Umgekehrt bilden drei Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten, die eine gleich grosse Kathete haben, auf entsprechende Weise neben einander gelegt, nach J. CUNLIFFE ein Dreieck mit rationalen Seiten und rationalen inneren Winkelhalbierenden. Als Beispiel werden die drei Paare kongruenter Dreiecke mit den Seiten

$$24, 143, 145; \quad 24, 32, 40 \quad \text{und} \quad 24, 7, 25$$

genannt, die nach CUNLIFFE zusammen das Dreieck mit den Seiten 39, 150, 175 ergeben.

Diese Methode ist falsch. Im Allgemeinen bilden die sechs genannten Dreiecke zusammen nicht ein Dreieck; CUNLIFFE hat nämlich nicht die Bedingung berücksichtigt, dass die sechs Winkel, die neben einander gelegt werden und je zwei gleich sind, zusammen einen Winkel von  $360^\circ$  bilden müssen. Man braucht sich also nicht zu wundern, dass im Dreieck mit den Seiten 39, 150 und 175 die Winkelhalbierende zwischen den Seiten 39 und 175 irrational ist.

**Satz 1.** Sind in einem Dreieck  $ABC$  die Seiten und die inneren Winkelhalbierenden rational, dann sind auch rational:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} A, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4} B \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4} C;$$

die äusseren Winkelhalbierenden;

der Flächeninhalt des Dreieckes;

die Halbmesser der um-, ein- und anbeschriebenen Kreise des Dreieckes;

die zwölf Entfernungen der Mittelpunkte dieser Kreise zu den Eckpunkten des Dreieckes.

<sup>1)</sup> J. CUNLIFFE, New Series of the Math. Repository, London 4, Pt. 2, 1819, 64.

Bemerkung. Wird nur die Rationalität der Seiten und von zwei inneren Winkelhalbierenden vorausgesetzt, so braucht die dritte innere Winkelhalbierende noch nicht rational zu sein. Denn wird das gleichschenklige Dreieck  $A B C$  mit  $a = b$  so gewählt, dass  $a$  und  $\cos \frac{1}{2} A$  rational,  $\sin \frac{1}{2} A$  irrational ist, dann ist

$$c = 2a \cos A = 2a(2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1)$$

rational, und auch die Halbierenden  $\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{1}{2} A$  der Basiswinkel, aber die dritte innere Winkelhalbierende  $a \sin A = 2a \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$  ist irrational.

*Beweis.* Die Längen der Winkelhalbierenden sind

$$\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{1}{2} A, \quad \frac{2ca}{c+a} \cos \frac{1}{2} B \text{ und } \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{1}{2} C, \quad \dots \quad (1)$$

sodass  $\cos \frac{1}{2} A$ ,  $\cos \frac{1}{2} B$  und  $\cos \frac{1}{2} C$  rational sind.

Hieraus folgt die Rationalität von

$$\sin \frac{1}{2} A = \frac{2a}{a+b+c} \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C,$$

von

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} A = \frac{1 - \cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A},$$

sowie von  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} B$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} C$ , der äusseren Winkelhalbierenden

$$\pm \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{1}{2} A, \quad \pm \frac{2ca}{c-a} \sin \frac{1}{2} B \text{ und } \pm \frac{2ab}{a-b} \sin \frac{1}{2} C,$$

des Flächeninhalts

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

der Halbmesser

$$\frac{abc}{4F}, \quad \frac{F}{s}, \quad \frac{F}{s-a}, \quad \frac{F}{s-b} \text{ und } \frac{F}{s-c}$$

der um-, ein- und anbeschriebenen Kreise ( $2s$  ist der Umriss des Dreiecks), und schliesslich der zwölf Entfernungen der Mittelpunkte dieser Kreise zu den Eckpunkten, da diese Entfernungen durch die Ausdrücke

$$\frac{s-a}{\cos \frac{1}{2} A}, \quad \frac{s}{\cos \frac{1}{2} A}, \quad \frac{s-b}{\sin \frac{1}{2} C}$$

und durch die neun hieraus durch Permutation von  $a, b, c$  entstehenden Ausdrücke angegeben werden.

**Satz 2.** Sind in einem Dreieck  $ABC$  eine Seite,  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} A$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} B$  rational, dann sind die Seiten und die inneren Winkelhalbierenden rational, sodass dann die Behauptung von Satz 1 gilt.

*Beweis.* Die Zahl

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{4} C &= \operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} B) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{4} (A + B)}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{4} (A + B)} \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{4} A - \operatorname{tg} \frac{1}{4} B - \operatorname{tg} \frac{1}{4} A \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{4} B}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{4} A + \operatorname{tg} \frac{1}{4} B - \operatorname{tg} \frac{1}{4} A \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{4} B}\end{aligned}$$

ist rational. Nun sind

$$\cos \frac{1}{2} A = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} A}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} A}, \quad \sin \frac{1}{2} A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{4} A}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} A}, \quad \sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A,$$

sowie  $\cos \frac{1}{2} B$ ,  $\cos \frac{1}{2} C$ ,  $\sin B$  und  $\sin C$  rational. Da eine Seite von  $\triangle ABC$  rational ist, folgt aus der Sinusregel die Rationalität der beiden andern Seiten, sodass die inneren Winkelhalbierenden, deren Längen in (1) angegeben sind, gleichfalls rational sind.

Ein Dreieck heisst primitiv, wenn die Längen der Seiten ganze Zahlen mit einem grössten gemeinsamen Teiler gleich 1 sind.

**Satz 3.** Bezeichnen  $m$  und  $n$  zwei natürliche, teilerfremde Zahlen verschiedener Parität<sup>1)</sup> mit  $m > n$ , so ist das gleichschenklige Dreieck  $ABC$  mit den Seiten

$$a = b = (m^2 + n^2)^2 \text{ und } c = \pm 2(m^2 - 2mn - n^2)(m^2 + 2mn - n^2). \quad (2)$$

ein primitives Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden; hierin wird natürlich das Plus- oder Minuszeichen benutzt, je nachdem  $m^2 - 2mn - n^2$  positiv oder negativ ist.

Auf diese Art findet man alle gleichschenkligen primitiven Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden.

Die Höhe  $h$  des Dreiekes ist  $4mn(m^2 - n^2)$ .

Ist  $m^2 - 2mn - n^2$  positiv, so ist

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} A = \frac{n}{m}; \quad a + b + c = 4(m^2 - n^2)^2; \quad a + b - c = 16m^2n^2; \quad (3)$$

ist  $m^2 - 2mn - n^2$  negativ, so ist

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} A = \frac{m-n}{m+n}; \quad a + b + c = 16m^2n^2; \quad a + b - c = 4(m^2 - n^2)^2. \quad (4)$$

---

<sup>1)</sup> Zwei Zahlen, von denen eine gerade und eine ungerade ist, heissen verschiedener Parität.

Bemerkung. Für jedes primitive Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit  $a = b$  sind also  $a + b + c$  und  $a + b - c$  gerade Quadrate, ist  $a$  ein ungerades Quadrat, und ist die Höhe durch 24 teilbar.

### Beweis von Satz 3.

1. Das Dreieck mit den in (2) angegebenen Seiten, wo  $m$  und  $n$  natürliche, teilerfremde Zahlen verschiedener Parität mit  $m > n$  bezeichnen, ist primitiv.

*Beweis.* Sonst könne man das  $\pm$  Zeichen so wählen, dass  $m^2 + n^2$  und  $2(m^2 \pm 2mn - n^2)$  einen gemeinsamen Primfaktor  $p$  besitzen;  $p$  wäre dann Faktor von

$$2(m^2 + n^2) + 2(m^2 \pm 2mn - n^2) = 4m(m \pm n),$$

also auch von

$$16m^2(m \pm n)^2 - 16m^2(m^2 + n^2) = \pm 32m^3n,$$

sodass  $p$  entweder gleich 2, oder ein Faktor einer der zwei Zahlen  $m$  und  $n$  wäre;  $p = 2$  kann nicht, da  $m$  und  $n$  verschiedene Parität haben, also  $m^2 + n^2$  ungerade ist; dass  $p$  ein Faktor von  $m$  ist, ist auch ausgeschlossen, da dann  $p$  ein Faktor von  $(m^2 + n^2) - m^2 = n^2$ , also von  $n$  wäre, sodass dann  $m$  und  $n$  einen gemeinsamen Faktor  $p$  hätten; der Beweis, dass  $p$  kein Faktor von  $n$  sein kann, geht genau ebenso.

2. Das Dreieck  $ABC$  mit den Seiten

$$a = b = (m^2 + n^2)^2 \text{ und } c = 2(m^2 - 2mn - n^2)(m^2 + 2mn - n^2),$$

wo  $m$  und  $n$  positive rationale Zahlen mit  $m > n$  und  $m^2 - 2mn - n^2 > 0$  bezeichnen, hat rationale Winkelhalbierenden. Dieses Dreieck hat eine Höhe  $h = 4mn(m^2 - n^2)$ , und genügt der Beziehung (3).

*Beweis.* Bezeichnet  $\alpha$  den im ersten Quadranten liegenden Winkel mit  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{m}$ , dann ist

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2mn}{m^2 - n^2},$$

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{(m^2 - n^2)^2 - (2mn)^2}{(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2} \\ &= \frac{(m^2 - 2mn - n^2)(m^2 + 2mn - n^2)}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{c}{2a} = \cos A \end{aligned} \quad ; \quad . \quad (5)$$

wegen  $\alpha < 45^\circ$  folgt hieraus  $4\alpha = A$ , sodass  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}A$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}B$  den rationalen Wert  $\frac{n}{m}$  besitzen, also die Winkelhalbierenden nach Satz 2 rational sind.

Ausserdem ist

$$\left. \begin{aligned} a+b+c &= 2(m^2+n^2)^2 + 2(m^2-2mn-n^2)(m^2+2mn-n^2) \\ &= 2(m^4+2m^2n^2+n^4) + 2(m^4-6m^2n^2+n^4) \\ &= 4(m^4-2m^2n^2+n^4) = 4(m^2-n^2)^2 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} a+b-c &= 2(m^2+n^2)^2 - 2(m^2-2mn-n^2)(m^2+2mn-n^2) \\ &= 2(m^4+2m^2n^2+n^4) - 2(m^4-6m^2n^2+n^4) = 16m^2n^2 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

und

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} = 4mn(m^2-n^2). \quad (8)$$

### 3. Das Dreieck $ABC$ mit den Seiten

$$a=b=(m^2+n^2)^2 \text{ und } c=2(-m^2+2mn+n^2)(m^2+2mn-n^2),$$

wo  $m$  und  $n$  positive rationale Zahlen mit  $m > n$  und  $-m^2+2mn+n^2 > 0$  bezeichnen, hat rationale Winkelhalbierenden. Dieses Dreieck hat eine Höhe  $h=4mn(m^2-n^2)$ , und genügt der Beziehung (4).

*Beweis.* Bezeichnet  $\alpha$  den im ersten Quadranten liegenden Winkel mit  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m-n}{m+n}$ , dann ist

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{m^2 - n^2}{2mn},$$

$$\cos 4\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{(2mn)^2 - (m^2 - n^2)^2}{(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2}$$

$$= \frac{(-m^2 + 2mn + n^2)(m^2 + 2mn - n^2)}{(m^2 + n^2)^2} = \frac{c}{2a} = \cos A;$$

wegen  $\alpha < 45^\circ$  folgt hieraus  $4\alpha = A$ , sodass  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}A$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}B$ , also auch die Winkelhalbierenden rational sind.

Ersetzt man in (6), (7) und (8)  $c$  durch  $-c$ , so erhält man

$$a+b-c=4(m^2-n^2)^2; \quad a+b+c=16m^2n^2; \quad h=4mn(m^2-n^2).$$

4. In jedem primitiven Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit  $a=b$  können die Seiten auf die in (2) angegebene Gestalt gebracht werden, wo  $m$  und  $n$  zwei natürliche teilerfremde Zahlen verschiedener Parität mit  $m > n$  bezeichnen.

*Beweis.* Die rationale Zahl  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}A$  kann gleich  $\frac{k}{h}$  gesetzt werden, wo

$h$  und  $k$  positiv, ganz und teilerfremd sind mit  $h > k$ . Ersetzt man in (5)  $a$  durch  $\frac{1}{4}A$ ,  $m$  durch  $h$  und  $n$  durch  $k$ , dann bekommt man

$$\frac{(h^2 - 2hk - k^2)(h^2 + 2hk - k^2)}{(h^2 + k^2)^2} = \cos A = \frac{c}{2a}.$$

sodass zwei natürliche teilerfremde Zahlen  $f$  und  $g$  mit

$$a = b = \frac{g}{h^4} \cdot \frac{(h^2 + k^2)^2}{f} \text{ und } c = \frac{g}{h^4} \cdot \frac{2(h^2 - 2hk - k^2)(h^2 + 2hk - k^2)}{f}$$

existieren. Hierin sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  ganz. Da  $h$  und  $k$ , also auch  $h^4$  und  $(h^2 + k^2)^2$  teilerfremd sind, ist  $h^4$  ein Teiler von  $g$ , sodass  $\frac{g}{h^4}$  eine natürliche Zahl ist. Die Zahlen  $f$  und  $g$  sind teilerfremd, sodass  $a$ ,  $b$  und  $c$  durch  $\frac{g}{h^4}$  teilbar sind. Aus der Voraussetzung, dass  $\triangle ABC$  primitiv ist, folgt

nun  $\frac{g}{h^4} = 1$ , also

$$a = b = \frac{(h^2 + k^2)^2}{f} \text{ und } c = \frac{2(h^2 - 2hk - k^2)(h^2 + 2hk - k^2)}{f}. \quad (9)$$

Hierin sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  ganz, sodass  $f$  ein Teiler von

$$2(h^2 + k^2)^2 - 2(h^2 - 2hk - k^2)(h^2 + 2hk - k^2) = 16h^2k^2$$

ist. Aber  $h^2 + k^2$  und  $hk$  sind teilerfremd (denn ein gemeinsamer Primfaktor  $p$  trete entweder in  $h$ , also in  $(h^2 + k^2) - h^2 = k^2$ , oder in  $k$ , also in  $(h^2 + k^2) - k^2 = h^2$  als Faktor auf, sodass dann die teilerfremden Zahlen  $h$  und  $k$  einen Primfaktor  $p$  gemeinsam hätten), sodass  $f$  ein Teiler von 16 ist, also den Wert 1, 2, 4, 8 oder 16 hat.

Ist  $f = 1$ , und ersetzt man  $h$  durch  $m$ ,  $k$  durch  $n$ , dann geht (9) über in (2), wo  $m$  und  $n$  teilerfremde Zahlen mit  $m > n$  bezeichnen;  $m$  und  $n$  haben verschiedene Parität, da sonst  $a$  gerade, also  $a$ ,  $b$  und  $c$  durch 2 teilbar wären.

Hiermit ist der Beweis für den Fall mit  $f = 1$  geliefert, sodass wir weiter  $f = 2, 4, 8$  oder 16 annehmen dürfen. Dann ist  $h^2 + k^2$  gerade, sodass die zwei teilerfremden Zahlen  $h$  und  $k$  beide ungerade sind,  $h^2 + k^2$  durch 2, aber nicht durch 4, und  $(h^2 + k^2)^2$  durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist. Dass  $f = 8$  oder 16 ist, ist somit ausgeschlossen. Aber auch  $f = 2$  kann nicht, da dann  $a$ ,  $b$  und  $c$  alle drei gerade wären.

Folglich ist  $f = 4$ . Setzt man nun  $\frac{h+k}{2} = m$  und  $\frac{h-k}{2} = n$ , also  $h = m+n$ ,  $k = m-n$ , dann sind  $m$  und  $n$  zwei natürliche, teilerfremde Zahlen mit  $m > n$ , und denn verwandelt (9) sich in (2);  $m$  und  $n$  sind

dabei wiederum verschiedener Parität, da sonst  $a$ ,  $b$  und  $c$  alle drei gerade wären.

Hiermit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Dieser Satz ergibt nicht nur die gleichschenkligen Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden, sondern auch die ungleichschenkligen mit dieser Eigenschaft. Denn es mögen  $A B C$  und  $A' B' C'$  zwei solche primitive gleichschenklige Dreiecke mit den Seiten

$$a = b = u^2, \quad c = 2v, \quad a' = b' = u'^2, \quad c' = 2v'$$

und mit den Höhen  $h = 24w$ ,  $h' = 24w'$  bezeichnen. Durch Multiplikation mit  $\frac{w}{d}$  und  $\frac{w'}{d}$ , wo  $d$  der grösste gemeinsame Teiler von  $w$  und  $w'$  ist, verwandeln diese zwei Dreiecke sich in die zwei Dreiecke mit den Seiten

$$\frac{w'}{d} u^2, \quad \frac{w'}{d} u^2, \quad 2\frac{w'}{d} v \quad \text{und} \quad \frac{w}{d} u'^2, \quad \frac{w}{d} u'^2, \quad 2\frac{w}{d} v',$$

die dieselbe Höhe  $\frac{ww'}{d}$  besitzen. Werden diese zwei gleichschenkligen Dreiecke so auf einander gelegt, dass diese Höhen zusammenfallen, dann entstehen zwei neue Dreiecke mit den Seiten

$$\frac{w'}{d} u^2, \quad \frac{w}{d} u'^2, \quad \frac{w'v + wv'}{d} \quad \text{und} \quad \frac{w'}{d} u^2, \quad \frac{w}{d} u'^2, \quad \pm \frac{w'v - wv'}{d}.$$

Im erstgenannten dieser neuen Dreiecke sind die Basiswinkel gleich  $A$  und  $B'$ , sodass in diesem Dreieck die Winkelhalbierenden wegen der Rationalität von  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} A$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} B'$  nach Satz 2 rational sind. Im zweiten der genannten neuen Dreiecke sind die Basiswinkel gleich  $A$  und  $180^\circ - B'$ , oder  $180^\circ - A$  und  $B'$ , sodass auch dieses Dreieck rationale Winkelhalbierenden hat. Umgekehrt findet man, abgesehen von einem rationalen Faktor, auf diese Art alle ungleichschenkligen Dreiecke  $A^* B^* C^*$  mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden. Denn wegen der Rationalität von  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} A^*$  existiert ein primitives gleichschenkliges Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Basiswinkel gleich  $A^*$  oder  $180^\circ - A^*$ ; gleichfalls existiert ein primitives gleichschenkliges Dreieck mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Basiswinkel gleich  $B^*$  oder  $180^\circ - B^*$ . Die obige Methode, auf diese zwei gleichschenkligen Dreiecke angewendet, ergibt ein Dreieck mit Basiswinkel gleich  $A^*$  und  $B^*$ , das also  $\sim \triangle A^* B^* C^*$  ist.

In der folgenden Sitzung werde ich eine Tafel von allen nach wachsendem  $a$  geordneten primitiven Dreiecken  $A B C$  mit rationalen Winkelhalbierenden und mit  $a = b < 160000$  veröffentlichen; die Anzahl dieser Dreiecke ist 63. Mittels der obigen Methode liest man aus dieser Tafel leicht viel mehr als 1000 verschiedene primitive ungleichschenklige Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden ab.

**Mathematics.** — *Über die Elemente der Funktionentheorie und die PICARDSchen Sätze in der intuitionistischen Mathematik.* By M. J. BELINFANTE. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

Der vorliegende Artikel gibt in sehr verkürzter Form einige Resultate einer intuitionistischen Betrachtung der Elemente der Funktionentheorie und der PICARDSchen Sätze. Eine ausführliche Darstellung wird gelegentlich folgen.

Unter Beschränkung auf in den bezüglichen Gebieten gleichmässig differenzierbare Funktionen, kann man in der intuitionistischen Mathematik auf die übliche Weise die Richtigkeit der CAUCHYSchen Integralsätze und Formeln feststellen, und unter den bekannten Bedingungen die TAYLORSche und die LAURENTSche Reihenentwicklung herleiten. Ganze transzendente Funktionen und singuläre Stellen von in gewissen Gebieten regulären Funktionen können im positiven und im negativen Sinne definiert werden, wobei ohne nähere Erklärung immer der positive Sinn gemeint ist. Dem weiteren Aufbau wird folgender Satz vorausgeschickt:

1. Ist  $f(z)$  eine für  $|z| \leq R + \varrho$  ( $0 < \varrho; 0 < R$ ) reguläre und für  $z \leq R$  variable Funktion, so kann man eine natürliche Zahl  $N$  und eine positive Zahl  $\beta$  wählen mit der Eigenschaft, dass zu jedem  $z \leq R$  eine natürliche Zahl  $p < N$  so bestimmt werden kann, dass  $|f^p(z)| > \beta$  ist.

Der Beweis gelingt unter Verwendung des TAYLORSchen Satzes, indem man passende Zahlen  $N_1 < N_2 < \dots < N_r = N$ ,  $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r = \beta$  und  $z_1, z_2, \dots, z_h = z$  ( $h < r$ ) derart wählt, dass die Aussage: "Falls für ein bestimmtes  $n_i < N_i$   $|f^{n_i}(z_i)| > \beta_i$  ist, so kann man  $n_{i+1} < N_{i+1}$  derart bestimmen, dass  $|f^{n_{i+1}}(z_{i+1})| > \beta_{i+1}$  ist" für jedes  $1 \leq i \leq h-1$  richtig ist. Mit Hilfe eines derartigen Induktionsverfahrens beweist man:

2. Ist  $f(z)$  eine für  $|z| \leq R + \varrho$  ( $0 < \varrho; 0 < R$ ) reguläre und für  $z \leq R$  variable Funktion, so existiert eine natürliche Zahl  $N$  mit der Eigenschaft, dass man zu jedem  $\varepsilon > 0$   $2N$  Zahlen  $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{2N} < \varepsilon$  und eine positive Zahl  $K$  derart bestimmen kann, dass für jedes  $z_0 \leq R$  ein bestimmtes  $1 \leq p \leq 2N$  existiert, so dass für jedes  $\frac{r_p}{2} \leq |h| \leq r_p$   $|f(z_0 + h)| > K$  ist.

Nicht jeder Nullstelle einer rationalen, ganzen Funktion kann eine bestimmte Multiplizität zugeordnet werden: laut Definition werden deshalb einer Funktion  $F(z)$  innerhalb eines Gebietes  $n$  Nullstellen beigelegt, falls

ein System von  $n$  Werten  $w_1, w_2, \dots, w_n$  innerhalb des Gebietes und zwei positive Zahlen  $m_1 < m_2$  derart bestimmt sind, dass, wenn  $\varphi(z) := F(z) : \Pi(z - w_i)$  für  $z \neq w_i$  gesetzt wird,  $\varphi(w_i) = \lim_{z \rightarrow w_i} \varphi(z)$  für jedes  $i$  vorhanden und  $m_1 < |\varphi(z)| < m_2$  für jedes  $z$  innerhalb des Gebietes ist.

Man kann, wenn  $f(z)$  eine variable Funktion ist, durch passende Wahl von Polygonen  $P_n$ , ein Integral von der Form  $\int_P \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  zerlegen in eine

Summe solcher Integrale  $\sum \int_{P_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  und beweist so den Satz:

3. Eine für  $|z| \leq R + \varrho$  ( $0 < \varrho; 0 < R$ ) reguläre Funktion  $f(z)$ , für die in jedem Punkt des Randes eines bestimmten Polygons  $L$  innerhalb des Kreises  $|z| = R$   $|f(z)| > a > 0$  ist, und für die  $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  einen positiven Wert  $p$  annimmt, wenn längs  $L$  im positiven Sinne integriert wird, hat  $p$  Nullstellen innerhalb  $L$ .

Der Fundamentalsatz der Algebra folgt unmittelbar aus Satz 3; ebenso, unter Anwendung eines Induktionsverfahrens, die von BROUWER bewiesene intuitionistische Ergänzung.<sup>1)</sup>

Der an sich nicht ganz richtige<sup>2)</sup> Satz, dass der absolute Betrag einer für  $|z| \leq R + \varrho$  ( $0 < R; 0 < \varrho$ ) regulären Funktion innerhalb des Kreises  $|z| = R$  nicht grösser ist als das Maximum auf der Peripherie, kann für viele Anwendungen ersetzt werden durch:

4. Ist  $f(z)$  regulär für  $|z| \leq R + \varrho$  ( $0 < \varrho; 0 < R$ ) und variabel für  $|z| \leq R$ , so kann man die positiven Zahlen  $K$  und  $\eta$  derart bestimmen, dass zu jedem  $z_0 < R - \frac{\varrho}{2}$  ein  $z_1 \leq R$  existiert mit der Eigenschaft dass  $|f(z_1)| > |f(z_0)| + K$  ist, während  $|f(z)| < |f(z_0)| + K$  ist für jedes  $|z - z_0| < \eta$ .

und den hieraus folgenden Satz:

5. Ist  $f(z)$  regulär für  $|z| \leq R + \varrho$  ( $0 < \varrho; 0 < R$ ) und gilt  $|f(z)| \leq \mu$  für jedes  $|z| = R$ , so gilt  $|f(z)| \leq \mu$  für jedes  $|z| < R$ .

Als Hilfssatz für den Beweis des WEIERSTRASSschen Satzes 7 beweist man:

6. Ist  $f(z)$  eine ganze transzendente Funktion, so kann man zu jedem

<sup>1)</sup> Proceedings Amsterdam 27, S. 635.

<sup>2)</sup> Die Existenz eines Maximums für den absoluten Betrag von  $f(z)$  auf der Peripherie ist nämlich im allgemeinen nicht gesichert.

komplexen  $w$  und jedem positiven  $\epsilon$ , für die die Ungleichung  $|f(z) - w| > \epsilon$  innerhalb des Kreises  $|z - z_0| = R$  erfüllt ist,  $|z_1| > R$  derart bestimmen, dass  $|f(z_1) - w| < \epsilon$  ist.

7. Ist  $z_0$  eine wesentlich singuläre Stelle für die im Gebiete  $0 < |z - z_0| < R$  eindeutig-reguläre Funktion  $f(z)$ , und sind die positiven Zahlen  $\delta$  und  $\epsilon$  und die komplexe Zahl  $w$  beliebig vorgelegt, so kann man  $|z_1 - z_0| < \delta$  derart bestimmen, dass  $|f(z_1) - w| < \epsilon$  ist.

Zu den Sätzen 1, 2, 3, 4 und 5 bestehen Korollare, wobei das Reguläritätsgebiet ein Ringgebiet ist. Zum Satz 7 gibt es in der intuitionistischen Mathematik eine gewisse Umkehrung:

7a. Ist  $f(z)$  eindeutig-regulär für  $0 < |z - z_0| < R$  und sind die reellen Zahlen  $\varrho \leq R$  und  $\epsilon > 0$  und eine komplexe Zahl  $w$  derart vorgelegt, dass  $|f(z) - w| > \epsilon$  ist für jedes  $0 < |z - z_0| < \varrho$ , so kann man eine ganze Zahl  $m$  derart bestimmen, dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$  ist.

Für die Beweise der PICARDSchen Sätze kann nun der LANDAUSchen Darstellung auf Schritt und Tritt gefolgt werden, wobei allerdings kleine Abänderungen von prinzipieller Wichtigkeit angebracht werden sollen, und jeder Satz in zwei einander ergänzende Theoreme zerfällt:

8. Ist  $F(z)$  eine ganze variable Funktion, so kann man zu zwei willkürlich vorgelegten, positiv von einander verschiedenen, komplexen Zahlen  $a$  und  $b$  die Zahl  $z_0$  derart bestimmen, dass entweder  $F(z_0) - a = 0$  oder  $F(z_0) - b = 0$  ist.

8a. Ist  $F(z)$  ganz und sind zwei positiv von einander verschiedene, komplexe Zahlen  $a$  und  $b$  derart vorgelegt, dass überall  $F(z) - a \neq 0$  und  $F(z) - b \neq 0$  ist, so ist  $F(z)$  konstant.

9. Ist  $F(z)$  eindeutig-regulär für  $0 < |z - z_0| < R$  und ist  $z_0$  eine wesentlich singuläre Stelle von  $F(z)$ , so kann man zu zwei willkürlich vorgelegten, positiv von einander verschiedenen, komplexen Zahlen  $a$  und  $b$  für jedes positive  $r < R$  einen Wert  $0 < z_1 - z_0 < r$  derart bestimmen, dass entweder  $F(z_1) - a = 0$  oder  $F(z_1) - b = 0$  ist.

9a. Ist  $F(z)$  eindeutig-regulär für  $0 < |z - z_0| < R$  und ist  $z_0$  eine singuläre Stelle dieser Funktion, während zwei positiv von einander verschiedene, komplexe Zahlen  $a$  und  $b$  derart vorgelegt sind, dass für jedes  $0 < |z - z_0| < R$   $F(z) - a \neq 0$  und  $F(z) - b \neq 0$  ist, so kann man  $m$  derart bestimmen, dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m F(z) = 0$  ist.

**Mathematics.** — *Über eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie.* Von J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. P. EHRENFEST.)

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

*Einleitung.*

In einer eben erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> haben A. EINSTEIN und W. MAYER eine neue Feldtheorie entwickelt, deren Ausgangspunkt darin gelegen ist, dass jedem Punkte einer  $V_4$ <sup>2)</sup> eine lokale  $R_5$ <sup>3)</sup> zugeordnet wird, in welcher die lokale  $R_4$  eingebettet ist. Im Gegensatz zu den bestehenden metrischen fünfdimensionalen Theorien wird aber die  $V_4$  nicht in eine  $V_5$  eingebettet. Wird nun neben der gewöhnlichen Übertragung der Vierervektoren eine Übertragung der Fünfervektoren über  $V_4$  eingeführt, und stellt man für diese neue Übertragung folgende Forderungen auf:

1. Das invariante<sup>4)</sup> Differential des Fundamentalensors in  $R_5$  sei Null;
  2. Wird ein Vektor der  $R_4$  einmal nach der Vorschrift der einen, das andre Mal nach der Vorschrift der andren Übertragung pseudo-parallel verschoben, so soll die Differenz der verschobenen Vektoren senkrecht zur  $R_4$  sein;<sup>5)</sup>
  3. Diese Differenz soll verschwinden wenn die Übertragung in der Richtung des Vektors stattfindet,<sup>6)</sup>
- so ergibt sich eine Geometrie die einerseits die Feldgleichungen von Gravitation und Elektromagnetismus in zwangloser Weise zusammenfasst und anderseits geodätische Linien besitzt, die mit den Weltlinien geladener Teilchen zusammenfallen. Die Parameter der Übertragung der Fünfervektoren, die nicht durch die RIEMANNSche Übertragung in der  $V_4$  bestimmt sind, hängen nur noch von einem Bivektor  $F_{\lambda\mu}$  ab, der die Rolle des elektromagnetischen Bivektors spielt.

<sup>1)</sup> Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. Berl. Akad. Bd. 25 (1931) S. 541—557. Herr EINSTEIN hatte die Freundlichkeit uns die Druckfahnen dieser Arbeit zur Einsicht zu überlassen.

<sup>2)</sup>  $X_n = n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit;  $V_n = X_n$  mit einer gewöhnlichen RIEMANNSchen Geometrie. EINSTEIN und MAYER bezeichnen mit  $V_n$  was wir mit  $R_n$  bezeichnen.

<sup>3)</sup>  $R_n$  = in sich ebene  $V_n$  (d. h.  $V_n$  mit verschwindender Krümmungsgrösse).

<sup>4)</sup> Auch kovariantes Differential oder absolutes Differential genannt.

<sup>5)</sup> Man kann diese Bedingung auch so formulieren: Das invariante Differential in  $V_4$  soll die Projektion des neuen invarianten Differentials auf die lokale  $R_4$  sein. Eine solche Bedingung gilt bekanntlich auch für eine  $V_4$  in  $V_5$ .

<sup>6)</sup> Eine solche Bedingung gilt dann und nur dann für eine  $V_4$  in  $V_5$ , wenn die  $V_4$  in  $V_5$  geodätisch ist.

Es lässt sich zeigen, dass man dieselbe Theorie auch erhält wenn man ausgeht von einer  $V_5$  mit einer metrischen aber *nicht symmetrischen* Geometrie in welcher der für die Übertragung längs der  $V_4$  wesentliche Teil des Affinors der Asymmetrie  $S_{\lambda\mu}^{\gamma\tau}$  mit den Indizes  $\lambda$  und  $\mu$  in der  $V_4$  und mit dem Index  $\gamma$  senkrecht zur  $V_4$  liegt und also von der Form  $F_{\lambda\mu}^{\gamma\tau}$  ist, wo  $\tau$  zur lokalen  $R_4$  senkrecht und  $F_{\lambda\mu}^{\gamma\tau}$  ein Bivektor der  $V_4$  ist. Wird dann nachher die ganze  $V_5$  bis auf die infinitesimalen  $R_5$  in den Punkten der  $V_4$  wegrasiert, so ergibt sich genau die neue Feldtheorie, deren Eigentümlichkeit den älteren fünfdimensionalen Theorien gegenüber also gerade darin besteht dass  $S_{\lambda\mu}^{\gamma\tau}$  nicht Null ist.

Noch in anderer Weise lässt sich dieselbe Theorie ableiten indem man von einer gewöhnlichen  $V_5$  mit einer Kongruenz von Bahnkurven einer Bewegung ausgeht und nachher die  $V_5$  nach der Kongruenz „zusammenlegt“, d.h. von jeder Kurve der Kongruenz alle Punkte identifiziert.  $F_{\lambda\mu}^{\gamma\tau}$  ist hier die Grösse, die für die Anholonomität der auf der Kongruenz senkrechten lokalen  $R_4$  massgebend ist. Wir behalten uns vor auf diese beiden Ableitungen an anderer Stelle ausführlicher zurück zu kommen.

In allen diesen Auffassungen spielt das Fünfdimensionale eine wesentliche Rolle. Zwar hat die neue EINSTEIN-MAYERSche Theorie den grossen Vorzug dass sie das physikalisch nicht interpretierbare fünfdimensionale Kontinuum fortbrasiert hat, es bleiben aber die in den lokalen  $R_5$  aus der  $V_4$  hinauszeigenden Richtungen und auch diese sind dem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum wesensfremd. Man möchte doch lieber mit einer rein vierdimensionalen Theorie auskommen.

Es ist Aufgabe dieser Arbeit zu zeigen, dass dies in ganz ungezwungener Weise möglich ist ohne das Resultat, das sind die neuen Feldgleichungen, zu verlieren. In der RIEMANNSchen Geometrie ist die Abbildung benachbarter lokaler  $R_4$  zunächst rein eine Abbildung von (freien) Vektoren. Man kann sie aber zu einer Punktabbildung erweitern indem man den Aufpunkt in den benachbarten Aufpunkt und die Masshyperfläche ( $t^\alpha r^\beta g_{\alpha\beta} = 1$ )<sup>1)</sup> in die benachbarte Masshyperfläche übergehen lässt. Wird dies analytisch gefasst, so muss eine Addition von Punkten benutzt werden, wie sie zuerst von MÖBIUS eingeführt wurde; jeder Punkt bekommt dabei ein Gewicht und somit insgesamt fünf Bestimmungszahlen. Nun fällt sofort auf, dass die Forderung der Invarianz der Masshyperfläche nicht aufgegeben werden kann ohne der Geometrie ihren typisch metrischen Charakter zu nehmen, dass aber dagegen die Forderung der Invarianz des Aufpunktes nebенäglich ist. Lässt man diese Forderung fallen und ersetzt man sie durch eine schwächere Forderung, deren einfachste geometrische Deutung ist, dass freie Vektoren (Punkte im Unendlichen mit Gewicht Null) wenigstens bei Übertragung in ihrer eignen Richtung in freie Vektoren und nicht in im Endlichen

<sup>1)</sup>  $r\gamma$  – Radiusvektor vom Aufpunkt zu einem veränderlichen Punkt der lokalen  $R_4$ .

gelegene Punkte übergehen, so entsteht bei Festhaltung einer gewissen Symmetrieforderung eine Geometrie, die genau dasselbe leistet wie die EINSTEIN-MAYERSche, aber vollständig vierdimensional bleibt. In dieser Geometrie wird eine geladene Masse dargestellt durch eine „Hyperkugel“ in der lokalen  $R_4$  mit einem Radius, der dem Quotient  $\frac{m}{e}$  proportional ist; die geodätischen Linien, die einem solchen Gebilde zugeordnet sind, fallen mit den wirklichen Weltlinien zusammen.

Die Abbildung benachbarter lokaler  $R_4$  ist nicht mehr affin, sondern projektiv, und damit ordnet sich die neue Feldtheorie ein in eine Reihe von Untersuchungen über projektive Übertragungen, die seit 1921 von WEYL, CARTAN, SCHOUTEN, VEBLEN, J. M. THOMAS, T. Y. THOMAS, GOLAB, WHITEHEAD, HOFFMANN und v. DANTZIG veröffentlicht wurden.<sup>1)</sup> Insbesondere ist hier den Arbeiten von VEBLEN<sup>2)</sup> und HOFFMANN<sup>3)</sup> zu gedenken, die eine Übertragung untersucht haben, die von beliebigen in den lokalen Mannigfaltigkeiten liegenden quadratischen Hyperflächen ausgeht und von welcher die hier betrachtete ein spezieller Fall ist.<sup>4)</sup> Eine Verallgemeinerung dieser VEBLENSchen Übertragungen werden wir in einer demnächst zu veröffentlichten Arbeit bringen.

### § 1. Die projektive Übertragung.

Die Koordinaten einer  $V_4$  seien  $\xi^\gamma$  ( $a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \iota = 1, \dots, 4$ ). Der Fundamentaltensor sei  $g_{\alpha\beta}$ . Jedem Punkte  $\xi^\gamma$  der  $V_4$  ist die lokale  $R_4$  der  $d\xi^\gamma$  zugeordnet, der Punkt  $\xi^\gamma$  heisse *Aufpunkt* seiner  $R_4$ . Wir betrachten die mit einem MÖBIUSSchen „Gewicht“ versehenen Punkte der lokalen  $R_4$  und ordnen jedem solchen Punkte fünf Bestimmungszahlen  $v^\nu$  ( $\nu, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega = 0, 1, \dots, 4$ ) zu, das Gewicht  $v^0$  und vier Bestimmungszahlen  $v^\nu$ , die dermassen gewählt sind, dass  $v^\nu/v^0$  die Bestimmungszahlen in Bezug auf die  $\xi^\gamma$  sind des Vektors der  $R_4$ , der sich vom Aufpunkt

<sup>1)</sup> Eine Uebersicht der einschlägigen Literatur bis 1929 findet sich bei J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB, Über projektive Übertragungen und Ableitungen, I Math. Zeitschr. **32** (1930) 192–214; II Annali di Matematica, (4) **8** (1931) 141–157. Eine Verallgemeinerung sämtlicher Theorien findet sich in einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit von D. VAN DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs  $n$ -dimensionaler Räume. In dieser Arbeit wird die formale Sonderstellung des Index 0 durch Einführung homogener Urvariablen aufgehoben.

<sup>2)</sup> O. VEBLEN, A generalisation of the quadratic differential form, Quarterly Jn. of Math., **1** (1930) 60–76. O. VEBLEN and B. HOFFMANN, Projective relativity, Physical Review, **36** (1931) 810–822.

<sup>3)</sup> B. HOFFMANN, Projective relativity and the quantumfield, Physical Review, **37** (1931), 88–89.

<sup>4)</sup> Die Theorie von VEBLEN steht in naher Beziehung zu der Theorie von D. J. STRUIK und N. WIENER, die von einer nichthomogenen Wellengleichung ausgeht und in folgenden Arbeiten niedergelegt ist: Sur la théorie relativiste des quanta, C. R. Bd. **185** (1927) S. 42–44; A relativistic theory of quanta, Journ. of Math. and Phys. Bd. **8** (1927)

bis zum Punkte  $v^\nu$  erstreckt. Aus der Punktrechnung ist bekannt, dass bei dieser Koordinatenwahl die Addition der Bestimmungszahlen mit der Punktaddition nach MÖBIUS korrespondiert und dass die Differenz zweier Punkte mit dem gleichen Gewicht  $\varrho = v^0$  ein Punkt mit dem Gewicht Null im Unendlichen ist und sich mit dem mit  $\varrho$  multiplizierten freien Vektor, der sich zwischen den beiden Punkten legen lässt, identifizieren lässt. Die Bestimmungszahlen des Aufpunktes verschwinden bis auf die mit dem Index Null. Die Hyperebenen der lokalen  $R_4$  werden ebenfalls mit einem Gewicht versehen. Eine Hyperebene bekommt ebenfalls fünf Bestimmungszahlen  $w_\mu$ , von denen  $w_0$  das Gewicht ist, während die anderen Koordinaten festgelegt sind durch die Forderung, dass bei Inzidenz von  $v^\nu$  und  $w_\lambda$  die Überschiebung  $v^\mu w_\mu$  verschwinden soll. Die Koordinaten der Hyperebene im Unendlichen verschwinden bis auf die mit dem Index Null. Kovariante Vektoren sind zu identifizieren mit Hyperebenen durch den Aufpunkt mit Gewicht Null. Ausgehend von den Punkten und Hyperebenen lassen sich jetzt *Projektoren* mit mehreren ko- oder kontravarianten Indizes definieren in derselben Weise wie dies mit gewöhnlichen Affinoren geschieht, wenn man von ko- und kontravarianten Vektoren ausgeht. Jeder gewöhnliche Affinor lässt sich auffassen als ein Projektator, dessen Bestimmungszahlen mit einem oder mehreren Indizes 0 alle verschwinden. Jeder Hyperfläche zweiten Grades in  $R_4$  ist in bis auf das Gewicht eineindeutiger Weise ein kovarianter und ein kontravarianter Punkttensor der Valenz Zwei<sup>1)</sup> zugeordnet; der Masshyperfläche

$$g_{\alpha\beta} r^\alpha r^\beta = 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

entsprechen insbesondere die Tensoren

$$\left. \begin{aligned} G_{00} &= -\tau; & G_{\alpha\beta} &= \tau g_{\alpha\beta}; & G_{\alpha 0} &= 0 \\ G^{00} &= -\frac{1}{\tau}; & G^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\tau} g^{\alpha\beta}; & G^{\alpha 0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

Die Normierung, das ist die Wahl von  $\tau$ , ist noch frei, wir beschränken uns aber in dieser Arbeit auf die Wahl  $\tau = 1$ . Ein Punkt  $v^\nu$  liegt dann und nur dann auf der Masshyperfläche, wenn

$$v^\lambda v^\mu G_{\lambda\mu} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

ist, und zwar unabhängig von der Normierung.

Wir wollen jetzt eine Punktübertragung einführen, d.h. eine Vorschrift für die Abbildung benachbarter  $R_4$  aufeinander. Ausser den üblichen Forderungen betreffs Linearität und Kontinuität stellen wir die

*Forderung I. Die Masshyperfläche soll bei der Übertragung samt ihrer Normierung invariant sein.*

<sup>1)</sup> Tensor = symmetrische Grösse; Valenz = Anzahl der Indizes.

Sind  $I_{\lambda\mu}^\nu$  die Parameter der Übertragung, so folgt aus dieser Forderung für das invariante Differential  $\delta G_{\lambda\mu}$  von  $G_{\lambda\mu}$ :

$$0 = \delta G_{\lambda\mu} = d\xi^\beta \nabla_\beta G_{\lambda\mu} = dg_{\lambda\mu} - I_{\lambda\beta}^\nu G_{\nu\mu} d\xi^\beta - I_{\lambda\beta}^\nu G_{\lambda\nu} d\xi^\beta \quad . \quad (4)$$

und daraus

$$\left. \begin{aligned} I_{\alpha\beta}^\gamma &= \{_{\alpha\beta}^\gamma\} + S_{\alpha\beta}^{\gamma\alpha} \\ I_{\alpha\beta}^0 &= I_{0\beta}^\gamma g_{\gamma\alpha} = T_{\alpha\beta} \\ I_{0\beta}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

in welchen Gleichungen  $\{_{\alpha\beta}^\gamma\}$  das aus den  $g_{\alpha\beta}$  abgeleitete CHRISTOFFEL-symbol zweiter Art und  $S_{\alpha\beta}^{\gamma\alpha}$  einen beliebigen in  $\alpha\beta$  alternierenden gewöhnlichen Affinor darstellt, und wo wir für  $I_{\alpha\beta}^0$  die Schreibweise  $T_{\alpha\beta}$  eingeführt haben, da  $I_{\alpha\beta}^0$  ein gewöhnlicher Affinor ist.  $I_{\gamma 0}^0$  ist nicht bestimmt und kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 0 gesetzt werden. Die zweite Forderung sei:

*Forderung II:  $S_{\alpha\beta}^{\gamma\alpha}$  sei Null.*

Kovariante Differentiation des Punktes  $v^\nu$  ergibt

$$\left. \begin{aligned} dv^\nu &= dv^\nu + I_{\alpha\beta}^\nu v^\alpha d\xi^\beta + T_{\beta\alpha}^\nu v^\alpha d\xi^\beta \\ dv^0 &= dv^0 + T_{\alpha\beta}^\nu v^\alpha d\xi^\beta \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo der Index  $\gamma$  mittels  $g^{\gamma\beta}$  heraufgezogen ist.

Bei pseudoparalleler Verschiebung ist also

$$\left. \begin{aligned} dv^\nu &= -I_{\alpha\beta}^\nu v^\alpha d\xi^\beta - T_{\beta\alpha}^\nu v^\alpha d\xi^\beta \\ dv^0 &= -T_{\alpha\beta}^\nu v^\alpha d\xi^\beta \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

sodass das Gewicht im allgemeinen nicht invariant bleibt. Ist also  $v^\nu$  ein Vektor, d.h. ist  $v^0 = 0$ , so braucht  $v^0$  nicht Null zu bleiben und ein Vektor geht also im Allgemeinen nicht in einen Vektor über, sondern in einen Punkt. Anders gesagt, die unendlichferne Ebene bildet sich bei der Übertragung im Allgemeinen ebensowenig wie der Aufpunkt auf sich selbst ab.

Wir wollen jetzt geodätische Linien definieren. Da Vektoren nicht mehr in Vektoren übergehen und ein Linienelement also nicht mehr in ein Linienelement, versagt die gewöhnliche Methode und wir müssen dem Linienelement zunächst einmal einen Punkt der lokalen  $R_i$  zuordnen. Wir fangen dazu mit einem Linienelement  $d\xi^\nu$  in einem beliebigen Anfangspunkt an. Ist  $ds$  die Länge von  $d\xi^\nu$ , so erhält man eine hinreichend allgemeine Zuordnung vermöge einer Gleichung von der Form:

$$p^0 = \varrho, \quad p^\nu = \sigma \frac{d\xi^\nu}{ds} \quad . \quad (8)$$

$p^\gamma$  ist also durch  $d\xi^\gamma$ ,  $\varrho$  und  $\sigma$  festgelegt.  $\varrho$  ist das Gewicht von  $p^\gamma$  und  $\frac{\sigma}{\varrho}$  die Entfernung von  $p^\gamma$  vom Aufpunkt.  $p^\gamma$  sei jetzt pseudoparallel über  $d\xi^\gamma$  verschoben:

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad dp^\gamma = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma p^\alpha d\xi^\beta - \varrho F_{\beta\gamma}^\alpha d\xi^\beta - \varrho H_{\beta\gamma}^\alpha d\xi^\beta \\ (b) \quad d\varrho = -H_{\alpha\beta} p^\alpha d\xi^\beta. \end{array} \right\} \dots \quad (9)$$

In diesen Gleichungen ist  $T_{\alpha\beta}$  in seinen symmetrischen und alternierenden Teil zerlegt:

$$F_{\alpha\beta} = T_{[\alpha\beta]}; \quad H_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)}. \quad \dots \quad (10)$$

Aus (9a) folgt, dass der Affinor  $S_{\alpha\beta}^\gamma$ , den wir Null gesetzt haben, sowieso aus der Gleichung verschwunden wäre. Eine leichte Rechnung führt von (9) zu den Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad \frac{d\varrho}{ds} = \sigma H_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \frac{d\xi^\beta}{ds} \\ (b) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \varrho H_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \frac{d\xi^\beta}{ds} \\ (c) \quad \frac{d}{ds} \frac{\varrho}{\sigma} = \left(1 - \frac{\varrho^2}{\sigma^2}\right) H_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \frac{d\xi^\beta}{ds} \\ (d) \quad \frac{d}{ds} (\sigma^2 - \varrho^2) = 0 \end{array} \right\}, \quad \dots \quad (11)$$

und zur Gleichung der geodätischen Linie:

$$\frac{d^2\xi^\gamma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{d\xi^\alpha}{ds} \frac{d\xi^\beta}{ds} + \frac{\varrho}{\sigma} F_{\beta\gamma}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} + \frac{\varrho}{\sigma} H_{\alpha\beta} \left( g^{\gamma\alpha} - \frac{d\xi^\gamma}{ds} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \right) \frac{d\xi^\beta}{ds} = 0 \quad (12)$$

Soll diese Gleichung nun die Weltlinie eines geladenen Teilchens darstellen, so muss zunächst der letzte Term rechts verschwinden. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass  $H_{\alpha\beta}$  von der Form

$$H_{\alpha\beta} = H g_{\alpha\beta} \quad \dots \quad (13)$$

ist. Ausserdem muss  $\frac{\varrho}{\sigma}$  längs der Linie konstant und gleich  $\frac{ne}{m}$  sein. Nun

lehrt aber (11c) dass  $\frac{\varrho}{\sigma}$  nur konstant ist, wenn entweder  $1 - \frac{\varrho^2}{\sigma^2}$  oder  $H$  verschwindet. Die erste Möglichkeit scheidet aus, da man sonst  $\frac{ne}{m}$  nur gleich  $+1$  oder  $-1$  wählen könnte; es ist also  $H_{\alpha\beta} = 0$ . Geometrisch ist dies gleichbedeutend mit jeder der folgenden vier Forderungen:

*Forderung IIIa.* Der geodätisch verschobene Aufpunkt soll zusammen

mit dem neuen Aufpunkt eine Richtung bestimmen, die senkrecht zur Verschiebungsrichtung ist. (Vgl. Gleichung 9a).

*Forderung IIIb.* Das Gewicht eines jeden Punktes soll sich nicht ändern bei geodätischer Verschiebung in der dem Punkte selbst zugeordneten Richtung (11a).

*Forderung IIIc.* Die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Aufpunkt soll sich nicht ändern bei geodätischer Verschiebung in der dem Punkte selbst zugeordnete Richtung (11c).

*Forderung IIId.* Ein Vektor soll bei geodätischer Verschiebung in seiner eigenen Richtung wieder in einen Vektor übergehen. (Diese Forderung ist sowohl in IIIb als in IIIc enthalten).

Die Weltlinie einer elektrisch geladenen Masse wird folgendermassen bestimmt: man wählt in der lokalen  $R_4$  in der Verschiebungsrichtung in der Entfernung  $\frac{m}{\kappa e}$  einen Punkt, dessen Gewicht  $\varrho$  belanglos ist, und orientiert sich bei der Fortsetzung der Linie nach der geodätischen Verschiebung dieses Punktes. Da eine Masse sich aber in allen (zeitartigen) Richtungen verschieben lässt, lässt sie sich in jedem Punkte am besten darstellen durch die Hyperfläche mit den Gleichungen

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta = -\frac{m^2}{\kappa^2 e^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (14)$$

in der lokalen  $R_4$ . Der für die Fortsetzung einer Weltlinie massgebende Punkt ist dann stets der Schnittpunkt dieser Hyperfläche mit einem Strahl in der Fortschreitungsrichtung.

Die Gleichungen der invarianten Ableitung lauten also jetzt für einen Punkt

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\beta v^\gamma &= \partial_\beta v^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha + F_{\gamma\beta}^\alpha v^\alpha, \\ \nabla_\beta v^0 &= \partial_\beta v^0 + F_{\alpha\beta}^\alpha v^\alpha \\ \nabla_0 v^\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (15)$$

und für eine Hyperebene

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\beta w_\alpha &= \partial_\beta w_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma w_\gamma - F_{\alpha\beta}^\gamma w_\gamma, \\ \nabla_\beta w_0 &= \partial_\beta w_0 - F_{\gamma\beta}^\alpha w_\gamma, \\ \nabla_0 w_\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (16)$$

Für kontravariante Vektoren, d.h. Punkte mit  $v^0 = 0, v^\gamma \neq 0$ , lautet diese Ableitung also

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\beta v^\gamma &= \partial_\beta v^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha \\ \nabla_\beta v^0 &= F_{\alpha\beta}^\alpha v^\alpha \\ \nabla_0 v^\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

Daneben besteht für Vektoren noch die gewöhnliche RIEMANNSCHE Ableitung

$$\left. \begin{aligned} \overset{R}{\nabla}_\beta v^\gamma &= \partial_\beta v^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha, \\ \overset{R}{\nabla}_\beta v^0 &= \overset{R}{\nabla}_0 v^\gamma = 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

Wir wollen die Ableitung (17) im Gegensatz zur RIEMANNSCHEN die *projektive* nennen. Aus (17, 11) folgt, dass die projektive Ableitung eines gewöhnlichen Affinors dann und nur dann der RIEMANNSCHEN gleich ist, wenn alle ihre Bestimmungszahlen, die einen Index 0 tragen, verschwinden.

Dies ist dann und nur dann für alle Vektoren der Fall, wenn das elektromagnetische Feld  $F_{\alpha\beta}$  verschwindet. Die projektive Ableitung von  $g_{\alpha\beta}$  verschwindet im allgemeinen nicht, im Gegensatz zur projektiven Ableitung von  $G_{\lambda\mu}$  und zur RIEMANNSCHEN Ableitung von  $g_{\alpha\beta}$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\beta g_{\alpha\gamma} &= 0 \\ \nabla_\beta g_{\alpha 0} &= \nabla_\beta g_{0\alpha} = -\Gamma_{0\beta}^\gamma g_{\gamma\alpha} = -F_{\alpha\beta} \\ \nabla_\beta g_{00} &= 0 \\ \nabla_0 g_{\lambda\mu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (19)$$

## § 2. Krümmungsgrößen und Feldgleichungen.

Bei zweimaliger Differentiation und Alternation eines Punktes ist

$$\nabla_{[\delta\beta]} v^\gamma = -\frac{1}{2} L_{\delta\beta\lambda}^\gamma v^\lambda \quad \dots \quad (20)$$

wo

$$L_{\delta\beta\lambda}^\gamma = -2 \partial_{[\delta} \Gamma_{|\lambda|\beta]}^\gamma - 2 \Gamma_{\rho[\delta}^\nu \Gamma_{|\lambda|\beta]}^\rho \quad \dots \quad (21)$$

in  $\delta\beta$  ein gewöhnlicher Affinor, in  $\lambda\nu$  dagegen ein Projektator ist.

Schreiben wir  $K_{\delta\beta\lambda}^\gamma$  für die RIEMANNSCHE Krümmungsgröße:

$$\overset{R}{\nabla}_{[\delta\beta]} v^\gamma = -\frac{1}{2} K_{\delta\beta\lambda}^\gamma v^\lambda, \quad \dots \quad (22)$$

so sind die Beziehungen zwischen  $L_{\delta\beta\lambda}^\gamma$  und  $K_{\delta\beta\lambda}^\gamma$  gegeben durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad L_{\delta\beta\alpha}^\gamma &= K_{\delta\beta\alpha}^\gamma - 2 F_{[\delta}^\gamma F_{|\alpha|\beta]}, \\ (b) \quad L_{\delta\beta\alpha}^0 &= -2 \overset{R}{\nabla}_{[\delta} F_{|\alpha|\beta]}, \\ (c) \quad L_{\delta\beta 0}^\gamma &= -2 \overset{R}{\nabla}_{[\delta} F_{|\beta]}^\gamma = L_{\delta\beta\alpha}^0 g^{\alpha\gamma}, \\ (d) \quad L_{\delta\beta 0}^0 &= -2 F_{\alpha[\delta} F_{|\beta]}^\alpha. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (23)$$

zwischen den durch Faltung entstehenden Größen  $K_{\beta\alpha} = K_{\delta\beta\alpha}^{\delta}$  und  $L_{\beta\lambda} = L_{\delta\beta\lambda}^{\delta}$  durch

$$\left. \begin{aligned} L_{\beta\alpha} &= K_{\beta\alpha} - F_{\beta}^{\delta} F_{\alpha\delta}, \\ L_{\beta 0} &= -\nabla_{\delta}^R F_{\beta\alpha}^{\delta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (24)$$

und zwischen den durch Überschiebung mit  $g_{\mu\nu}$  entstehenden Skalaren  $L$  und  $K$  durch

$$L = g^{\alpha\beta} L_{\beta\alpha} = K - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (25)$$

Die Identität von BIANCHI lautet

$$\nabla_{[\varepsilon} L_{\delta\beta]\lambda}^{\gamma} = 0. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (26)$$

und daraus folgt

$$\nabla_{[\varepsilon} L_{\delta\beta]\lambda}^{\gamma} = \nabla_{[\varepsilon}^R L_{\delta\beta]\lambda}^{\gamma} + F_{[\varepsilon}^{\gamma} L_{\delta\beta]\lambda}^0 = 0. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (27)$$

Aus (27) folgt durch Faltung nach  $\varepsilon$  und  $\nu$ :

$$\nabla_{\varepsilon} L_{\delta\beta\lambda}^{\varepsilon} + 2 \nabla_{[\beta} L_{\delta]\lambda}^{\beta} = 0. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (28)$$

und durch Überschiebung mit  $g_{\gamma\delta}$ :

$$\nabla_{\beta} L - 2 \nabla_{\delta} L_{\beta}^{\delta} = 0. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (29)$$

Setzen wir nun mit EINSTEIN und MAYER<sup>1)</sup>

$$L_{\mu\lambda}^* = L_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} L g_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} K g_{\mu\lambda} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (30)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad L_{\alpha\beta}^* &= L_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} (L + K) g_{\alpha\beta}, \\ (b) \quad L_{\alpha 0}^* &= -\nabla_{\delta}^R F_{\alpha\beta}^{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (31)$$

so ist

$$\nabla_{\delta} L_{\mu\lambda}^* = \partial_{\delta} L_{\mu\lambda}^* - \Gamma_{\lambda\delta}^{\nu} L_{\mu\nu}^* - \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha} L_{\alpha\lambda}^* \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (32)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\delta} L_{\beta\alpha}^* &= \nabla_{\delta}^R L_{\beta\alpha}^* + F_{\alpha\delta}^{\varepsilon} \nabla_{\varepsilon}^R F_{\varepsilon\beta}^{\beta}, \\ \nabla_{\delta} L_{\beta 0}^* &= -\nabla_{\delta\alpha}^R F_{\alpha\beta}^{\alpha} - F_{\alpha\delta}^{\alpha} L_{\beta\alpha}^*, \\ \nabla_{\delta} L_{0\alpha}^* &= -F_{\gamma\delta}^{\gamma} L_{\alpha\gamma}^*, \\ \nabla_{\delta} L_{00}^* &= F_{\gamma\delta}^{\gamma} \nabla_{\alpha}^R F_{\alpha\gamma}^{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (33)$$

<sup>1)</sup> Dort ist  $L^*$  mit  $U$ ,  $L$  mit  $P$ ,  $K$  mit  $R$  bezeichnet.

woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \nabla_{\beta} L^{\alpha\beta}_{,\alpha} &= \overset{R}{\nabla}_{\beta} L^{\alpha\beta}_{,\alpha} + F_{\alpha}^{\beta} \overset{R}{\nabla}_{\epsilon} F^{\epsilon}_{,\beta} \\ &= \frac{1}{2} \overset{R}{\nabla}_{[\beta} F_{\beta\alpha]} F^{\beta\alpha} \\ (b) \quad \nabla_{\beta} L^{\alpha\beta}_{,\alpha} &= - \overset{R}{\nabla}_{\delta\gamma} F^{\gamma\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (34)$$

Die EINSTEIN-MAYERSchen Feldgleichungen lauten in unserer Geometrie:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad L_{\beta\lambda} &= 0 \\ (b) \quad L_{[\beta\alpha]}^{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (35)$$

(35b) ist infolge (23b) identisch mit dem zweiten MAXWELLSchen System:

$$\overset{R}{\nabla}_{[\beta} F_{\beta\alpha]} = 0 \dots \quad (36)$$

Zwischen den 18 Gleichungen (35) bestehen die 8 Identitäten (31b) und (34a). (34b) ist eine Folge von (31b). (35a) zerfällt in die Gravitationsgleichungen

$$K_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} K g_{\beta\alpha} + F_{\gamma\beta} F_{\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{4} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} = 0 \dots \quad (37)$$

und das erste MAXWELLSche System

$$\overset{R}{\nabla}_{\beta} F^{\beta}_{,\alpha} = 0 \dots \quad (38)$$

Es ist merkwürdig, dass man  $g_{\lambda\mu}$  in (30) nicht durch  $G_{\lambda\mu}$  ersetzen darf, da sonst  $L_{00}^* = \frac{1}{4}(R + K)$  wäre, was zu der unzutrefflichen Gleichung

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0 \dots \quad (39)$$

führen würde.

Die Beziehungen zwischen der VEBLENSchen und der EINSTEIN-MAYERSchen Theorie sollen in der oben angekündigten Arbeit erörtert werden.

**Zoophysiology.** — *Die Koordination beim Herzen von Helix pomatia und die Bedeutung der Dehnung für die Auslösung der Systole und die Koordination.* Von H. P. A. WILLEMS. (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

JORDAN hatte schon im Jahre 1927 die Vermutung ausgesprochen, dass die Koordination vom Atrium- und Ventrikelschlag bei *Helix pomatia* nicht auf Leitung des Impulses beruhe, sondern auf gegenseitiger Dehnung beider Herzteile. Das zweiteilige Herz ist am venösen und am arteriellen Ende am Perikard befestigt. Dieses ist durch seinen flüssigen Inhalt gespannt und spannt daher seinerseits das Herz. Hierdurch kommt es, dass bei der Systole des Atriums der Ventrikel und bei Ventrikelsystole das Atrium passiv gedehnt werden. Es ist schon länger bekannt, dass nach Eröffnung des Perikards die Koordination gestört ist und beide Herzteile in eignem Rhythmus unabhängig von einander schlagen. Im Laboratorium für vergleichende Physiologie in Utrecht wurde dann später gezeigt, dass es genügt die Spannung, die das Perikard verursacht, irgendwie zu ersetzen um die Koordination wiederum zu ermöglichen. Man kann auch zwei gleichnamige Herzteile mit einander durch einen Hebel verbinden (wobei dann jede Impulsleitung ausgeschlossen ist) und erhält vollkommene Koordination.

Hypothetisch unterscheiden wir daher bei der Koordination zwei Erscheinungen: 1. die Erzeugung von Erregung innerhalb jeden Herzteiles. Diese Erzeugung dauert eine bestimmte Zeit, die von der Temperatur abhängt. Hypothetisch kann man an einen Reizstoff denken (HABERLANDT), der sich bei der Systole verbraucht und der in der Diastole neu erzeugt wird. 2. Der zweite Faktor ist die passive Dehnung, die zwar zum Zustandekommen der Systole nicht nötig ist, sie aber zum Zwecke der Koordination vorzeitig herbeiführt. Man kann sagen: Reizstoff + Dehnung = Systole. Das Verhältnis beider Faktoren zueinander war das erste Problem, welches gelöst werden musste. Offenbar wirkt die Dehnung nur innerhalb einer gewissen letzten Zone der Reizstofferzeugung. Es ist à priori anzunehmen, dass wenn die Dehnung vor einem bestimmten Moment eintritt, sie keine *unmittelbare* Systole auslösen kann und damit keine Koordination. Wir wollen daher unterscheiden zwischen einer sich der Systole anschliessenden Phase, in der die Dehnung keine Systole auslöst und einer zweiten, in der das wohl der Fall ist. Diese letzte wollen wir die „*Bereitschaftszone*“ nennen. Wir benutzen hier neue

Begriffe, da ihre Identifizierung mit den gebräuchlichen: absolute und relative refraktäre Periode, zur Zeit nicht möglich ist.

Um die Bedeutung der Reizstofferzeugung für das Entstehen der Bereitschaft zu ergründen, wurden Versuche angestellt, wobei zwei gleichnamige Herzteile zweier Schnecken durch einen Hebel verbunden werden und jeder Teil in ein Gefäß mit Schneckenblut kommt, bei welchem wir, je individuell, die Temperatur ändern können. Die Bewegungen des Hebels werden fotografisch registriert. Wenn wir ausgehen von zwei Ventrikeln, die bei gleicher Temperatur durch die gegenseitige Dehnung, welche der Hebel vermittelt, koordiniert schlagen, so genügt es in einem der Gefäße die Temperatur um verhältnismässig wenige Grade zu erniedrigen, um einen Herzblock 2:1 zu erzeugen. Das gleiche gilt für zwei Atria. Der gekühlte Teil befindet sich dann noch nicht in der „Bereitschaftszone“, wenn der andere Teil ihn passiv dehnt. Es entsteht keine Systole, die dann erst bei der folgenden Dehnung durch die folgende Systole des antagonistischen Teiles eintreten kann.

Es war nun notwendig die Bedeutung der Dehnung als Reiz durch Versuche festzustellen. 1. *Konstante Spannung*. Konstante Spannung wirkt frequenzerhöhend mit einem Optimum. Dieses Optimum liegt beim Ventrikel bei höherer Spannung als beim Atrium. Wenn wir nun beide Teile mehr und mehr belasten, so nimmt die Frequenz des Ventrikels relativ zum Atrium mehr und mehr zu. Unbelastet: A. 8, V. 6; 75 mg : A. 16, V. 14; 150 mg : A. 16, V. 22; 225 mg : A. 17, V. 25 Schläge pro Minute.

2. *Kurze Spannungsreize*. Mit einem Apparat, der es erlaubte an beliebigen Stellen der systolischen Periode einen beliebigen Herzteil ganz kurz zu dehnen, konnten folgende Resultate erzielt werden. Während der Systole hat diese Dehnung keinen Einfluss, das Herz ist dann absolut refraktär. Schwache Dehnungsreize während des Anfangs des Diastolestadiums verlängern in der Regel die darauf folgende Periode, bestehend aus Diastole bis zum Ende der Systole. Starke Dehnungsreize haben zu Anfang der Diastole keinen unmittelbaren Reizerfolg, verkürzen aber die Gesamtperiode, die wir untersuchen. Diese Periode wird dann um so kürzer, je stärker die Dehnung, je höher also das dehnende Gewicht ist. Nach der Mitte der Diastoleperiode und während der Pause verkürzt auch schwache Dehnung von kurzer Dauer die Gesamtperiode. Die optimale Stelle befindet sich zwischen Anfang und Mitte der Pause. Es ergibt sich hieraus, dass man die Dehnung nicht eigentlich als auslösenden Reiz betrachten kann; denn die enorm lange Latenz hängt nicht so sehr ab von der Reizstärke, als von dem Augenblicke (innerhalb der systolischen Periode) seiner Einwirkung. Die kurze Dehnung beschleunigt wohl nur den normalen, die Systole erzeugenden Prozess. In der Bereitschaftszone genügt die Beschleunigung um einen unmittelbar sichtbaren Erfolg zu erzielen. Vorher kann sie nur den Verlauf dieses Prozesses abkürzen.

Skelettmuskeln verhalten sich offenbar prinzipiell anders. Auch sie haben eine Restitutionsphase nach jeder Zuckung. Diese nimmt aber als automatischer Prozess ihr Ende, ohne eine Entladung zu verursachen, welche jeweils eines besonderen Reizes bedarf. Hier dürfte der Reiz etwas anders sein, als lediglich eine Beschleunigung der Restitution.

Einer besonderen Erklärung bedarf die Tatsache, dass die Beschleunigung der systolischen Periode durch die kurze Dehnung von dem Momente abhängt, in welchem sie angewandt wird. Man könnte sich den Einfluss der Dehnung wie folgt vorstellen: Die Erzeugung des Reizstoffes sei ein Prozess, der in Form einer S-förmigen Kurve verläuft. Mit anderen Worten: die Erzeugung beginnt langsam und nimmt etwa wie ein autokatalytischer Prozess an Geschwindigkeit zu. Nun wollen wir hypothetisch annehmen, die Dehnung beschleunige den Prozess etwa durch Vergrösserung von Oberflächen, die bei einem Diffusionsprozess eine Rolle spielen. Dann kann man sich weiterhin vorstellen, dass die Wirkung je grösser ist, desto mehr Stoffe schon im Begriffe stehen mit einander zu reagieren; d.h. zu Beginn des steilen Verlaufes der S-förmigen Kurve muss der Verkürzungseffekt auf die Periode am grössten sein. Wenn der grösste Teil des Wegs zurückgelegt ist, kann die Verkürzung sich nicht mehr im vollen Umfange geltend machen: daher das Optimum. Von grosser Bedeutung erscheint uns noch die Tatsache zu sein, dass die Wirkung von Dehnung und Temperatur sich zueinander summieren.

Es bleibt noch die Frage, welcher von beiden Teilen des Herzens die Leitung hat. Die Leitung hat hier immer der Ventrikel, nicht durch schnelleren eignen Rhythmus (im Gegenteil, diesen findet man in der Regel beim isolierten Atrium), sondern durch die grössere Stärke seiner Muskulatur.

Das Atrium dagegen ist schwach und sein Einfluss auf den Ventrikel gering. Während das Atrium unmittelbar auf den Zug des Ventrikels durch Systole folgt, dauert es eine kurze Zeit bis der Ventrikel auf das Atrium folgt. So entsteht die „Überleitungszeit“ des Helixherzens, die dem Blute die Zeit lässt den Ventrikel zu füllen. Die Überleitungszeit bei den Wirbeltieren hat allerdings eine ganz andere Ursache als hier bei den Schnecken. Wenn man das Gesamtherz etwas mehr als normal spannt, dann verschwindet diese „Überleitungszeit“. Die führende Bedeutung des Ventrikels ergibt sich, wenn man das Atrium höher erwärmt als ihn. Das Atrium versucht zwar seiner Temperatur entsprechend schneller zu schlagen, aber der wenig nachgiebige und muskelstarke Ventrikel widerersetzt sich der vorzeitigen Systole des Atriums und verhindert sie dermassen, dass dadurch der Ventrikel seinen normalen Dehnungsreiz entbehrt und der Gesamtrhythmus langsamer wird, als bei gleichmässiger niederer Temperatur. Gleiche Resultate erhält man, wenn man das Atrium stärker spannt als den Ventrikel. Auch hier folgt der Ventrikel dem Atrium nicht.

---

**Chemistry.** — *Über die Chemie des Wuchsstoffs.* Von F. KÖGL und  
A. J. HAAGEN SMIT. (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT.)

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

## I.

Die Untersuchungen über das pflanzliche Wachstum haben in den letzten Jahren zu wichtigen neuen Erkenntnissen geführt. Es hat sich zeigen lassen, dass bei der Zellteilung und der Zellstreckung unbekannte chemische Stoffe eine massgebende Rolle spielen; diese Stoffe erinnern in mancher Hinsicht an die Hormone des Tierreichs. Am eingehendsten ist bisher die physiologische Wirkungsweise des Wuchsstoffs studiert worden, der den Anstoß zum Zellstreckungs-Wachstum gibt. Wenn man bis jetzt auch noch nicht mit vielen Pflanzenarten experimentiert hat, so steht doch bereits fest, dass der Wuchsstoff wohl sehr allgemein verbreitet und nicht spezifisch ist. Bei dem wichtigsten Untersuchungsobjekt, den Graskoleoptilen, hatte BOYSEN—JENSEN<sup>1)</sup> schon vor mehr als zwanzig Jahren die Existenz solcher Substanzen vermutet und von PAAL<sup>2)</sup> konnte sie im Jahre 1919 bewiesen werden; durch die PAALSche Arbeit ergab sich vor allem auch der Zusammenhang zwischen den wachstumsfördernden Stoffen und den phototropischen Krümmungen. In der jüngsten Zeit sind aus dem Utrechter Botanischen Institut eine grosse Zahl wichtiger Arbeiten über den Wuchsstoff hervorgegangen; von diesen kommt der Untersuchung von F. W. WENT<sup>3)</sup> insofern eine ganz besondere Bedeutung zu, als hier eine einfache und zuverlässige Methodik zur quantitativen Bestimmung des Wuchsstoffs entwickelt wurde. Die Methode besteht im wesentlichen darin, Wuchsstoff (z.B. aus Koleoptilspitzen) in Agar-Agar-Würfelchen diffundieren zu lassen. Diese werden dann nach einer hier nicht näher zu beschreibenden Arbeitsweise einseitig auf dekapierte Koleoptilen aufgesetzt. Bei genügend grossen Verdünnungen ist die Ablenkung der Spitze proportional der Wuchsstoffmenge, sodass man durch eine einfache Winkelmessung am Schattenbild der Koleoptilen Rückschlüsse auf die Konzentrationen ziehen kann. Mit dieser Methodik hat F. W. WENT ein Testverfahren geschaffen, durch welches das Gebiet auch der chemischen Erforschung zugänglich wurde.

<sup>1)</sup> Ber. dtsch. bot. Ges. **28**, 118 (1910).

<sup>2)</sup> Ber. dtsch. bot. Ges. **32**, 499 (1914); Jahrb. wiss. Bot. **58**, 406 (1919).

<sup>3)</sup> Rec. Trav. bot. néerl. **25**, (1928). Dort auch die übrige Literatur; vgl. auch Lehrb. der Pflanzenphysiologie von S. KOSTYTSCHEW und F. A. F. C. WENT; 2. Band, 1931, Berlin, Verl. J. SPRINGER.

## II.

Die Arbeit, über welche hier berichtet wird, ist vor einem Jahre in Angriff genommen worden; es wäre nicht möglich gewesen, in dieser Zeit zu einem chemischen Ergebnis zu gelangen, wenn uns nicht Prof. F. A. F. C. WENT in entgegenkommender Weise mit der experimentellen Tradition seines Instituts bekannt gemacht hätte. Wir konnten die physiologischen Versuche in einem neu eingerichteten Dunkelraum des Utrechter botanischen Instituts durchführen und schulden auch hierfür besonderen Dank.

Bevor wir auf unsere Versuche zur Reindarstellung des Wuchsstoffs eingehen, müssen wir die Wuchsstoff-Einheit definieren, die wir unserer Arbeit zugrunde gelegt haben. Wir bezeichnen als Avena-Einheit (*AE*) jene Menge wirksamen Stoffes, die bei einer Temperatur von 22—23° und 92 % Feuchtigkeit unter den unten angegebenen Versuchsbedingungen innerhalb zwei Stunden die dekapitierte Koleoptile von *Avena sativa* um 10° krümmt, wenn der wirksame Stoff in einem Agar-Würfelchen von 2.0 cmm. einseitig auf diese dekapitierte Koleoptile aufgesetzt wird. Hierbei sind folgende Einzelheiten von Bedeutung:

1. Verwendet wurde SVALÖFS „Sieges“-Hafer; <sup>1)</sup>
2. Die Körner wurden eine Stunde in Wasser geweicht und dann auf feuchtem Filtrierpapier im diffusen Tageslicht bei 23—24° zur Keimung angesetzt. Nach 24 Stunden sind die Keimlinge für die Wasserkultur bereit.
3. Die Agar-Agar-Würfelchen sind aus 3 %igem Agar-Agar bereitet; ihr Volumen ist  $2 \times 2 \times 0.5$  cmm.
4. Die erste Dekapitation findet eine Stunde vor dem Versuch statt; kurz vor der eigentlichen Auswertung wird nach den Angaben von H. G. VAN DER WEY <sup>2)</sup> neuerdings dekapitiert und das Agarwürfelchen aufgesetzt.

Als wir den Wuchsstoff weitgehend angereichert hatten, zeigten sich Schwierigkeiten bei den Auswertungen dieser Lösungen. Die Ursache wurde darin erkannt, dass diese Lösungen zu arm an Elektrolyten oder anderen gelösten Stoffen waren; hierdurch werden vielleicht die Zellen an der Schnittfläche geschädigt. Durch Zusatz von Kaliumchlorid (160 mg. KCl pro Liter) konnte diese Fehlerquelle behoben werden. Ferner hat es sich bewährt, bei diesen angereicherten Lösungen eine geringe Menge Essigsäure zuzusetzen (0.2 ccm. pro Liter).

## III.

Wir mussten von vorneherein damit rechnen, dass in den Spitzen von Hafer- und Maiskoleoptilen nur äusserst geringe Wuchsstoffmengen

<sup>1)</sup> Wir haben für die Ueberlassung des Materials Herrn Dr. ÅKERMANN zu danken.

<sup>2)</sup> Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam **31**, 880 (1931).

hervorgebracht werden, sodass dieses Material für eine chemische Untersuchung schwerlich als Ausgangsprodukt dienen konnte. In einer Arbeit von NIELS NIELSEN<sup>1)</sup> ist jedoch ein neues Ausgangsmaterial beschrieben worden; die Pilze *Rhizopus suinus* Nielsen und *Absidia ramosa* geben an die Nährösungen Wuchsstoff — oder Wuchsstoffe — ab. Der Autor machte ferner die wichtige Feststellung, dass „Rhizopin“ in Wasser, Äther, Alkohol und Aceton löslich ist; es wurde auch bereits ein Präparat erhalten, das 7000 fach angereichert war. Wir konnten die Ergebnisse NIELSENS bestätigen und ferner auch bei *Rhizopus*<sup>2)</sup> *Delemar* (Boid.) Wehm. et Hanz., *Rh. nigricans* Ehrenberg, *Rh. reflexus* Bainier, *Rh. tritici* Saïto die Bildung wachstumsfördernder Stoffe nachweisen. Wir haben vor allem mit *Rh. reflexus* gearbeitet, den wir auf Sand kultivierten, der mit den üblichen Nährösungen befeuchtet war. Auch in Kulturen von *Bacillus coli* und im Waschwasser von gewöhnlicher Bäckerhefe haben wir ziemlich grosse Wuchsstoffmengen angetroffen. In der Zwischenzeit hat BOYSEN—JENSEN<sup>3)</sup> die Bildung von „Wachstums-Regulatoren“ bei *Aspergillus niger* und bei zahlreichen Bakterien beschrieben und NIELS NIELSEN<sup>4)</sup> hat schon vorher Wuchsstoffproduktion bei der Hefe festgestellt, sodass unsere hier mitgeteilten Befunde nur eine Bestätigung darstellen.

Wir hatten mit Versuchen begonnen, uns grössere Mengen der Kulturflüssigkeiten von *Rhizopus reflexus* und *Bacillus coli* zu verschaffen, als wir in der Schlempe ein viel leichter zugängliches Ausgangsmaterial fanden. Trotzdem die Anreicherung des Wuchsstoffs aus diesen Materialien gute Fortschritte machte, haben wir die weiteren Versuche hiermit für später zurückgestellt, da wir bald darauf im Harn eine Wuchsstoffquelle fanden, die bei weitem am ergiebigsten war. Dies zeigt sich in folgender Zusammenstellung, bei welcher der Wuchsstoffgehalt pro mg. Trockengewicht angegeben ist:

Diffusionsprodukt aus Maisspitzen <sup>5)</sup>	ca	300	AE pro mg
<i>Rhizopus reflexus</i>	40	— 110	„ „ „
Bäckerhefe	30	— 40	„ „ „
<i>Bacillus coli</i>	ca	50	„ „ „
Menschliche Faeces		5 — 10	„ „ „
Menschen-Harn <sup>6)</sup>	ca	400	„ „ „

<sup>1)</sup> Jahrb. f. wiss. Bot.; herausgegeb. v. H. FITTING 73, 189 (1930).

<sup>2)</sup> Für die freundliche Ueberlassung der Rhizopuskulturen haben wir Frl. Prof. Dr. JOH. WESTERDIJK, Baarn, sehr zu danken.

<sup>3)</sup> Biochem. Zeitschr. 236, 205; 239, 243 (1931).

<sup>4)</sup> Biochem. Zeitschr. 237, 244 (1931).

<sup>5)</sup> Für die freundliche Uebersendung grösserer Mengen Mais haben wir der „Landbouwkundige Onderafdeeling van het algemeen Proefstation voor den Landbouw“ in Buitenzorg und der „Proefstation“ in Paramaribo (Suriname) sehr zu danken.

<sup>6)</sup> In letzter Zeit wurde bei pathologischen Fällen ein Gehalt bis zu 2600 AE pro mg festgestellt; hierauf, sowie auf die Verhältnisse bei der Schwangerschaft werden wir demnächst zurückkommen.

Schon E. SEUBERT<sup>1)</sup> hatte gefunden, dass menschlicher Speichel eine geringe Menge Wuchsstoff enthält und BOYSEN—JENSEN<sup>2)</sup> wies kürzlich nach, dass die Speichelbakterien Wuchsstoff produzieren. Es ist möglich, dass der Wuchsstoff des normalen Harns durch die Darmbakterien hervorgebracht wird; über diese Frage sind Versuche im Gange. Man kann natürlich daran zweifeln, ob die wachstumsfördernden Stoffe aus diesen verschiedenen Ausgangsmaterialien miteinander identisch sind. Auf jeden Fall halten wir es zur Zeit für wahrscheinlich, dass es sich zum mindesten um eine Gruppe von nahe verwandten Stoffen<sup>3)</sup> handelt. Soweit wir die Anreicherung des Wuchssts off bei den verschiedenen Ausgangsmaterialien bereits durchgeführt haben, hat sich nämlich kein Unterschied in den chemischen Eigenschaften des aktiven Prinzips gezeigt. Es lässt sich aus sauren Lösungen mit organischen Lösungsmitteln, wie peroxydfreiem Äther oder Butylalkohol, extrahieren. Aus diesen Extrakten kann es mit verdünnter Natriumbicarbonatlösung ausgeschüttelt und nach dem Ansäuern mit Essigsäure wieder in Äther übergeführt werden. Der wirksame Stoff zeigt also das Verhalten einer Säure.

#### IV.

Aus praktischen Gründen haben wir für die weitere Arbeit Wuchsstoff aus Schwangerenharn verwendet, da die Bicarbonatfraktion hieraus in der Technik als Nebenprodukt bei der Darstellung der Sexualhormone anfällt. Wir sind der I. G. Farbenindustrie A. G., Werk Elberfeld, für die freundliche Bereitstellung dieses Ausgangsmaterials sehr zu Dank verpflichtet.

Das aus den Bicarbonatauszügen durch Ansäuern und Ausäthern zu gewinnende Rohprodukt lässt sich nun durch Extraktion mit siedendem Petroläther und Ligroin von etwa<sup>4,5</sup> der unwirksamen Begleitstoffe befreien. Der in Ligroin unlösliche Rückstand, welcher bereits pro mg 130.000 AE enthält, wird nun in wässrigem Alkohol aufgenommen und wiederholt mit Benzol ausgeschüttelt. Der Wuchsstoff bleibt in der wässrig-alkoholischen Phase. Die weitere Anreicherung gründen wir auf den sauren Charakter des Wuchsstoffes und zwar auf die fraktionierte Abscheidung eines in wässrigem Alkohol schwerlöslichen Bleiniederschlags. Aus diesen Niederschlägen lässt sich die wirksame Verbindung nach dem Ansäuern mit Essigsäure leicht durch Ausäthern zurückgewinnen. Die wirksamste Fraktion enthält nach dieser Aufarbeitung 1.000.000 AE pro mg. Hieran schliesst sich nun eine in ähnlicher Weise durchgeführte Fraktionierung der Calciumsalze, bei welcher vor allem einige gefärbte Begleitstoffe entfernt werden.

In diesem Stadium der Reindarstellung haben wir erst nach längerem Suchen dadurch weiteren Fortschritt erzielen können, dass wir das

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. Bot. 17, 49 (1925).

<sup>2)</sup> Biochem. Zeitschr. 236, 205 (1931).

<sup>3)</sup> Da für die Verschiedenheit der aktiven Stoffe kein experimenteller Hinweis vorliegt, wollen wir vorläufig auch weiterhin von "dem Wuchsstoff" sprechen.

hochaktive wuchsstoffhaltige Öl mit siedendem Methanol behandelten, das einige Prozent Chlorwasserstoff enthielt. Beim Ausschütteln der Ätherlösung des Reaktionsproduktes mit Natriumbicarbonat- und Soda-lösung blieb die Hauptmenge des aktiven Stoffes in der Neutralfraktion. Wie wir später festgestellt haben, ist der Wuchsstoff hierbei in eine Laktonform<sup>1)</sup> übergegangen, die bei der Auswertung an Avenakoleoptilen hochwirksam war (1.430.000 AE pro mg). Bei der Aufspaltung des Laktions wurde keine wesentliche Änderung der Aktivität beobachtet; diese Verhältnisse müssen aber — besonders in Zusammenhang mit dem pH der Versuchslösungen — noch genau untersucht werden.

Während die Hochvacuumdestillation vor der Laktonisierung zu erheblichen Verlusten an aktiver Substanz führte, war das neutrale Produkt mit gutem Erfolg im Hochvacuum zu fraktionieren. Eine bei 125—130° und 0.1 mm. destillierende Fraktion enthielt pro mg. mehr als 5.000.000 AE und war bereits grösstenteils krystallisiert; sie wurde zweimal aus wässrigem Aceton umkrystallisiert, wobei farblose Prismen vom Schmelzpunkt 172° (unkorr.) erhalten wurden. Die Wirksamkeit betrug pro Gramm etwa 30.000.000.000 AE. Bei einer zweiten Darstellung des Stoffes wurde dieselbe Aktivität festgestellt. Es ist also

$$1 \text{ AE} = \frac{1}{30.000.000} \text{ mg} = \frac{1}{30.000} \gamma.$$

An dieser Stelle möchten wir Frl. Dr. HANNI ERXLEBEN für die Mitarbeit bei den letzten Stufen der Reindarstellung und der folgenden analytischen Untersuchung danken. Wir hatten bisher etwa 10 mg. des krystallisierten Wuchsstoffs in Händen. Wir haben festgestellt, dass die Verbindung frei von Stickstoff, Schwefel<sup>2)</sup> und Phosphor<sup>2)</sup> ist.

Die Molekulargewichtsbestimmung in Campherlösung nach RAST ergab folgende Werte: 342, 353, 330. Diese Zahlen stimmen recht gut mit der Angabe von F. W. WENT überein, der aus der Bestimmung des Diffusionskoeffizienten von Wuchsstoff der Avena-Spitzen ein Molekulargewicht von 376 errechnet hat.

Da bei der Behandlung mit chlorwasserstoffhaltigem Methylalkohol eine Veresterung unseres Produktes stattgefunden haben konnte, haben wir als nächste Analyse eine Mikro-Zeisel-Bestimmung durchgeführt. Diese ergab keinen Methoxyl-Gehalt; wir ziehen daraus den Schluss, dass in unserer Verbindung ein Lakton vorliegt.

Eine Mikro-C-H-Bestimmung<sup>3)</sup> ergab folgende Werte:

4.849 mg. Subst.: 12.200 mg. CO<sub>2</sub>; 4.410 mg. H<sub>2</sub>O. Daraus berechnet sich: 68.62 % C, 10.18 % H und 21.20 % O.

Es ist natürlich eine viel grössere Zahl von Analysen erforderlich, um eine gesicherte Formel aufzustellen. Man darf jedoch wohl bereits den

<sup>1)</sup> Wir haben übrigens auch bei der Aufarbeitung des Wuchsstoffs aus Hefe einen Hinweis auf die Laktonisierbarkeit des aktiven Stoffes bekommen.

<sup>2)</sup> An krystallisiertem Rohprodukt geprüft.

<sup>3)</sup> Ausgeführt von Dr. Ing. A. SCHOELLER, Berlin-Schmargendorf.

Schluss ziehen, dass der Wuchsstoff wegen seines hohen Wasserstoffgehalts nicht aromatisch ist, sondern den aliphatischen Verbindungen nahestehen wird.

## V.

Wir schlagen für den Wuchsstoff die Bezeichnung *Auxin* (von *aὐξάνω* wachsen machen) vor, wobei es sich zur leichteren Namenbildung bei Derivaten empfehlen wird, hierunter die zugrundeliegende freie Säure zu verstehen. Im *Auxin* liegt der erste Stoff einer Gruppe vor, für deren Vertreter in der botanischen Literatur bisher die Bezeichnungen Korrelationsträger, Regulatoren und Hormone nebeneinander gebraucht werden. Es erscheint zweckmäßig, diese Verbindungen, zu denen neben dem Auxin auch Zellteilungshormone, Blüten- und Wurzelbildung anregende Stoffe u. s. f. gehören, mit einer einheitlichen Bezeichnung zusammenzufassen. Im Einvernehmen mit Prof. WENT möchten wir hierfür den Begriff *Phytohormone* in Vorschlag bringen. Hiermit wird auf die Analogie zu den auch chemisch bereits besser bekannten „*Zoohormonen*“ hingewiesen, ohne dass die für das Tierreich geltenden Verhältnisse zwangsläufig und unbesehen auf das Pflanzenreich übertragen werden müssen.

In diesem Zusammenhang sei auf eine vor kurzem erschienene Mitteilung von W. SCHOELLER<sup>1)</sup> und H. GOEBEL über die Wirkung des Follikelhormons auf Pflanzen hingewiesen. Diese Autoren haben gefunden, dass bei der Wasserkultur von Hyazinthen- und Küchenzwiebeln der Zusatz von technischem *Progynon* eine deutliche Beschleunigung von Wachstum und Blütenbildung<sup>2)</sup> hervorruft. Bei Versuchen mit krystallisiertem *Oestrin* war eine entsprechende Wirkung zu beobachten, die jedoch, wie die Bilder der Abhandlung zeigen, erheblich geringer blieb. — Wir haben gefunden, dass die Progynon-Ampullen des Handels in der Tat einen Stoff enthalten, der auch auf die dekapitierte *Avena*-Koleoptile wachstumsbeschleunigend wirkt; er ist — wie Auxin — bicarbonatlöslich. Ein Präparat von PARKE—DAVIS, das nach Angabe dieser Firma im ccm. 50 Ratten-Einheiten krystallisierten Follikelhormons *Theelin* enthielt, war bei *Avena*-Koleoptilen völlig wirkungslos. Es wird deshalb nötig sein, die Wuchswirkung der reinsten krystallisierten Stoffe miteinander zu vergleichen.

Es ist möglich, dass Auxin als physiologisch definierter, aber chemisch unbekannter Faktor in der Literatur in anderem Zusammenhang bereits beschrieben ist. Wir hoffen zu verschiedenen Fragen, die sich aus unseren Befunden ergeben, z.B. auch über Bedeutung und Wirkung des Auxins im Tierkörper, bald Stellung nehmen zu können. Die ausführliche Mitteilung und die Versuchsprotokolle werden an anderer Stelle veröffentlicht werden.

*Utrecht, Dezember 1931.*

*Organisch-Chemisches Laboratorium:*

<sup>1)</sup> Biochem. Zeitschr. 240, 1 (1931).

<sup>2)</sup> Auch bei Kulturen von Mais wurden ähnliche Beobachtungen gemacht.

**Botany.** — *On Bacteria of Salted Fish.* By HELENA F. M. PETTER.  
(Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT.)

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

The following bacteria were isolated

1. From salted herring :
  - a. a red rod
  - b. a red sarcina and
  - c. a colourless sarcina.
2. From dried cod-fish :  
a red rod.
3. From "Trapani" salt from a cannery at Bergen (Norway) :  
an orange rod.

The isolation succeeded on pepton agar with 30 % NaCl, pure cultures were obtained by smears.

### I. Description of the Bacteria.

#### a. The red rod isolated from salted herring and codfish.

The seven strains isolated from these materials had the following properties :

Non-sporulating rods: 2—11  $\mu \times 0.6$ —0.9  $\mu$ , motile, facultative aerobe. Gram-negative, catalase-positive. Does not grow on ordinary media. Colonies on agar (15—30 % NaCl): round. In broth (15—30 % NaCl). turbid with pellicle. Forms no indol; optimum temperature at 37° C. Does not ferment (in 30 % NaCl), either saccharose, maltose or glucose. Nitrates reduced to nitrites.

The above characteristics and the properties of the pigment (see below) correspond to those of *Bacillus halobius ruber Klebahn* (KLEBAHN (6)). Because the organism is no spore-former I propose to change this name to *Bacterium halobium*.

Three strains formed transparent colonies on the agar, while the remaining four strains formed opaque colonies. In both transparent and opaque strains the colour of the strains varies from orange-red to purple.

The opaque colonies are originally hyaline, the opacity is due to the development of one or more bodies within the bacterial cell. (see figures I, II & III). One of the strains is almost pure white; in this strain the bodies fill the cell to such an extent that only a small amount of peripheral protoplasm remains. Usually the properties of the strains prove to be constant on transfer. In an opaque colony I once observed a transparent

area with a straight boundary. Transfers showed that the bacteria within this area had lost the power to form the typical intracellular bodies.

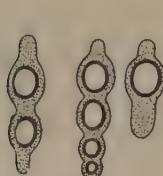


Fig. I

Bacteria with small "gas-vacuoles" in the cell



Fig. II

A young bacterium of the strain in which the "gas-vacuoles" fill the larger part of the cell-lumen

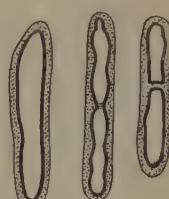


Fig. III

Older bacteria of the strain in which the "gas-vacuoles" fill the larger part of the cell-lumen

Similar sudden changes have been observed by various authors in *Bacillus prodigiosus Fl.*; *Bacillus violaceus Berg.* and others.

KLEBAHN has described, in the blue-green-algae, bodies with similar properties as formed in the *Bacterium halobium* (KLEBAHN (5) and (7)); the so-called gas-vacuoles. WILLE (14) and KOLKWITZ (8) observed similar structures in bacteria. The nature of these gas-vacuoles cannot be discussed here, let it suffice to point out that MOLISCH (11) doubts the gaseous nature of the contents of the vacuole and maintains that the "Schebekörperchen" contain either a viscous or a thin liquid. The following observations show the close resemblance of the bacterial structures with the "gas-vacuoles" or "Schebekörperchen".

1. The bodies disappear rapidly in 96 % ethylalcohol, in concentrated HCl and in  $\pm 6\%$  phenol, before the bacterial body is destroyed.
2. The structures remain intact in water; they coalesce when the bacteria are destroyed.
3. They become very pronounced and distinct in olive-oil.
4. They appear red.
5. They disappear when the culture-fluid is subjected to a pressure of a few atmospheres.
6. They disappear when, while suspended in concentrated KOH, the coverslip is pressed closely to the slide.
7. They disappear after boiling a bacterial suspension for some time.
8. The "opaque" bacteria show remarkable power of flotation while the "transparent" bacteria may be divided throughout the liquid.
9. The bodies do not disappear in vacuo (one week in a vacuum-desiccator).

The fact mentioned under 9 and already observed by KLEBAHN in Bluegreen-algae is MOLISCH' chief argument against the gaseous nature of the "Schebekörperchen". It may be, however, that the peripheral protoplasm is impermeable to gas (KLEBAHN (7)).

The points mentioned under 3 and 4 support KLEBAHN's hypothesis. The refractive index of the bodies is apparently lower than that of protoplasm and the only substances known to have a lower index than water are gases and vapours or at least bodies in which gases and vapours are occluded in large quantities.

Points 5 and 6 also support the idea that the vacuoles contain gas. If opaque bacteria were subjected to pressure, and then the pressure is suddenly released, gasbubbles are liberated from the bacterial mass. Transparent bacteria do not generate gas under similar conditions.

If opaque bacteria are subjected to pressure in concentrated KOH (6) the colony becomes quite transparent while at the same time a great number of gasbubbles appears on the slide. The opacity of the cells, their white colour, may be accounted for by the presence of intracellular gas.

Whatever the nature of these corpuscles, their presence in Bacteria gives added evidence of the close relationship of the *Schizomycetes* and *Schizophyceae*.

#### *b. The red sarcina.*

Spheres: 0.9—2.7  $\mu$  in diameter, occurring singly, in pairs or in packets. Aerobe. Gram negative, catalase positive. Forms no indol. Indifferent to diminution of NaCl-concentration. Gelatin stab (15 % NaCl): surface-growth and liquefaction. Agar-colonies (20 % NaCl): circular, opaque. Agar slant (20 % NaCl): opaque layer. Optimum temperature 37° C. No fermentation with sugars (20 % NaCl). Nitrates reduced to nitrites.

The properties of this organism correspond closely to those of *Sarcina morrhuae Klebahn* as well as to those of *Micrococcus (Diplococcus) morrhuae* of the same author (KLEBAHN (6)). The pigments cannot be extracted by the usual solvents, as also observed by KLEBAHN (see below).

The organism is exceptionally variable; in liquid media (slight growth on the bottom of the vessel) the Sarcina appears as spheres of 1.5—2.7  $\mu$  diameter, while on solid media the cells generally are much smaller (0.9—1.5  $\mu$  diam.). On the latter media the "packets" often are poorly developed. KLEBAHN mentions 1.5—2.7  $\mu$  as the dimension of the *Sarcina* and 0.9—1.5  $\mu$  for the *Micrococcus*. Therefore both forms are most probably identical and designated by me as *Sarcina morrhuae Klebahn*.

#### *c. The orange rod of the "Trapani" salt.*

Non-sporulating rods:  $0.6 \times 1.5$ —3.5  $\mu$ , facultative aerobe, gram negative, catalase positive; agar colonies (30 % NaCl): small, circular, transparent. Agar-slant (30 % NaCl): turbid. Forms no indol. Optimum temperature 37° C. Nitrates reduced to nitrites.

New species: *Bacterium trapanicum*.

#### *d. The colourless Sarcina.*

Spheres: 3—6  $\mu$  in diameter occurring singly, in pairs or in packets.

Protoplasm homogeneous; becomes granular in water. Aerobe. Gram positive, catalase negative. Agar colonies (35—3 % NaCl): circular, opaque. Agar slant (35—3 % NaCl): opaque layer. Optimum temperature 20° C. No fermentation in sugars (30 % NaCl) or in acidified malt-extract (30 % NaCl). Brownish-yellow on some media.

New species: *Sarcina gigantea*.

## II. The properties of the bacterial pigments.

The pigment of the red and orange bacteria described above does not diffuse into the agar. The potash-method of MOLISCH (10) showed that both *Bacterium trapanicum* and *Sarcina morrhuae* contained one carotinoid (needle-shaped crystals) while *Bacterium halobium* apparently contained two carotinoids (both needle-shaped and star-shaped crystals). The crystals show the well-known blue colour with H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. The pigment of *Bact. halobium* and *trapanicum* may be extracted with alcohol, while none of the ordinary solvents proved effective on the pigment of *Sarcina morrhuae*.

The pigment of *B. halobium* was studied more in detail. No bacterio-chlorin or bacterio-erythrin could be isolated, either by the methods of MOLISCH (12) or BUDER (4). The organism does not belong to the purple bacteria.

In order to obtain macroscopical quantities of the crystalline pigment a large amount of fresh bacteria of the same strain was extracted with acetone (according to WILLSTÄTTER and STOLL (15)) until the bacteria were quite decolourized. The pigment was then passed into an equal mixture (by volume) of ether and petroleum-ether. This solution was kept over a 30 % KOH solution in methyl alcohol in order to saponify fats and other esters. After one day the intensively red liquid was separated; washed with water and dried with dry Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. The solution was then evaporated and petroleum-ether added. The pigment is badly soluble in this substance. After one night's sojourn at —10° C. a crystalline precipitate appeared, which was finally purified by repeated precipitation from a CS<sub>2</sub> solution with petroleum-ether. The crystals were dried and kept under nitrogen in the dark; they are very dark red.

A few other precautions may be mentioned here: the solutions were kept under nitrogen in the dark, the temperature at the operations never exceeded 45° C. and only peroxyde-free ether was used.

The chromatographic method of TSWETT (13) showed that the crystalline mass consisted of two closely-related substances, both adsorbed by CaCO<sub>3</sub> from a CS<sub>2</sub> solution. As far as could be ascertained the properties of the isolated substances did not agree with any of the known carotinoids.

The pigment which is most actively adsorbed by CaCO<sub>3</sub> I will call *Bacterio-ruberin α*, the other pigment *Bacterio-ruberin β*. α occurs in larger quantities in the bacterial body than β.

The carotinoid-reactions of VAN WISSELINGH (16) are positive for both pigments. Their solubilities are almost similar, however,  $\beta$  is more yellowish than  $\alpha$ . The best solvent is methylalcohol, followed by acetone, ether,  $\text{CS}_2$ , chloroform, toluene. They are fairly soluble in ethylalcohol, poorly soluble in 96 % ethylalcohol, and slightly soluble in olive-oil. Only traces dissolve in petroleum-ether and benzene. The pigments are insoluble in water and in dilute acid.

In relation to the system petroleum-ether — methylalcohol (80—92 %) the pigments behave like xanthophyll and are, therefore, hypophasic. The preference for alcohol is not as great as in fucoxanthin, which substance dissolves in the methylalcohol in a system consisting of 70 % methylalcohol-ether + petroleum-ether (1 : 1). *Bacterio-ruberin*  $\alpha$  and  $\beta$  are divided over both phases;  $\alpha$ , however, prefers the methylalcohol while  $\beta$  is chiefly present in the upper layer.

The absorption maxima in the spectrum of both substances was measured by means of a double monochromator and a vacuum-thermo-couple. This instrument was kindly given at my disposal by Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN.

Bacterio-ruberin $\alpha$ in methylalcohol			Bacterio-ruberin $\beta$ in methylalcohol		
Band	Range	Maximum	Band	Range	Maximum
I strong	527—518 m $\mu$	522 m	I strong	508—499 m	504 m
II very strong	503—478 m $\mu$	490 m	II very strong	487—475 m	482 m
III weak	469—464 m $\mu$	467 m	III weak	—	453 m

Crude crystalline mixture ( $\alpha + \beta$ )				Ethylalcohol extract of <i>B. halobium</i> according to KLEBAHN (6)	
In $\text{CS}_2$		In $\text{CH}_3\text{OH}$		Band	Max.
Band	Max.	Band	Max.		
I strong	561 m $\mu$	I strong	525 m $\mu$	I strong	528 m $\mu$
II very strong	528 m $\mu$	II very strong	492 m $\mu$	II very strong	493 m $\mu$
III strong	497 m $\mu$	III strong	462 m $\mu$	III weak	462 m $\mu$

The observations of KLEBAHN agree quite closely with measurements obtained from a mixture of both pigments.

Only one strain being hitherto investigated, the pigments from other

strains were studied by means of adsorption-analysis. They all gave the same picture. The difference in colour of the various strains cannot be due to a difference in acidity for the pigment is not markedly influenced by this factor. Changes of a pigment with acidity have been observed in *Bacillus prodigiosus* (KRAFT (9)) and this pigment shows, therefore, no relation to the pigments of the red brine bacterium. Neither is there a close relation between *Bacterium halobium* and the purple-bacteria.

### III. Culture experiments.

Both *Sarcinae* and *Bacterium trapanicum* could be grown in a purely synthetic medium (with 1% asparagin or 1% glycocoll as a source of nitrogen). *Bacterium halobium*, however, only developed in peptone, yeast-extract or fish-bouillon. The inorganic medium of *Bacterium halobium* however, is more variable.

The control-medium consisted of :

NaCl 4.5 mol, MgSO<sub>4</sub> 0.02 %, K<sub>2</sub>HPO<sub>4</sub> 0.02 %, Peptone "Poulenc" 1 %. A good development took place at pH 5.6—8.0. In this mixture osmotic replacement of NaCl was made. In this way it could be shown that the organism was tolerant to KCl 3.1 mol (concentrated), (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> 0.5 mol, LiCl 0.5 mol, KBr 0.5 mol, CaCl<sub>2</sub> 0.1 mol, CaCl<sub>2</sub> 0.2 mol + MgCl<sub>2</sub> 0.1 mol, BaCl<sub>2</sub> 0.05 mol. No development took place in KNO<sub>3</sub> 2.3 mol, KJ 0.5 mol or Na<sub>2</sub>B<sub>4</sub>O<sub>7</sub> 0.01 mol. Both kations and anions may be toxic; we do not find here the pronounced kation-toxicity which is present in another brine-organism: *Dunaliella viridis* Teodoresco (BAAS BECKING (1)). The protoplasmic colloids in *Bacterium halobium* may be, therefore, closer to their isoelectric point.

The Ca-Mg antagonism of the bacterium is also quite different from that of *Dunaliella*. While in the former 0.1 mol MgCl<sub>2</sub> may counteract the toxic effect of 0.2 mol CaCl<sub>2</sub> (Mg : Ca = ½) in *Dunaliella* this relation is, at 4 mol NaCl Mg : Ca = 20 (BAAS BECKING (2)). The toxicity of Lithium for *Bacterium halobium* may be compared with the toxicity of Li and K for the nauplii of the brine-shrimp: *Artemia salina* (BOONE and BAAS BECKING (3)); while neither Na, K or Li are toxic to *Dunaliella* (BAAS BECKING (1)).

I want to express here my best thanks to Prof. Dr. A. J. KLUYVER and Prof. Dr. L. G. M. BAAS BECKING for their helpfull advise.

This is a preliminary communication. An extensive publication will follow later.

### LITERATURE

- (1) BAAS BECKING, L. G. M. 1930. Observations on *Dunaliella viridis* Teod. Contributions to marine biology. Standford Univ. Press.
- (2) ————— 1931. Salt effects on swarms of *Dunaliella viridis* Teod. The Journal of general Physiology Vol. 14, 6.
- (3) BOONE, E. and BAAS BECKING, L. G. M. 1931. Salt effects on eggs and nauplii of *Artemia salina* L. The Journal of General Physiology Vol. 14, 6.

- (4) BUDER, J. 1919. Zur Biol. des Bacterio-purpurins und der Purpurbakterien. Jahrb. f. Wiss. Bot. **58**.
- (5) KLEBAHN, H. 1895. Gasvakuolen, ein Bestandteil der Zellen der wasserblütbildenden Phycochromaceen Flora **80**.
- (6) —————— 1919. Die Schädlinge des Klippfisches. Mitteilungen aus dem Institut für allgemeine Bot. in Hamburg. Bd. **4**.
- (7) —————— 1922. Neue Untersuchungen über die Gasvakuolen. Jahrb. f. Wiss. Bot. **61**.
- (8) KOLKWITZ, R. 1928. Ueber Gasvakuolen bei Bakterien. Ber. d. D. Bot. Ges. **46**.
- (9) KRAFT, E. 1902. Beitr. zur Biol. des Bact. prodigiosum und zum chem. Verhalten seines Pigmentes. Inaug. diss. phil. Fac. Würzburg.
- (10) MOLISCH, H. 1896. Die Krystallisation und der Nachweis des Xanthophylls (Carotins) in Blättern. Ber. d. D. Bot. Ges. **14**,
- (11) —————— 1903. Die sogenannten Gasvakuolen und das Schweben gewisser Phycochromaceen. Bot. Ztg. **61**.
- (12) —————— 1907. Die Purpurbakterien. Jena.
- (13) TSWETT, M. 1906. Adsorptionsanalyse und Chromatographische Methode. Ber. D. Bot. Ges. **24**.
- (14) WILLE, N. 1902. Ueber Gasvakuolen bei einer Bacterie. Biol. Centralbl. **22**.
- (15) WILLSTÄTTER, R. and STOLL, A. 1913. Untersuchungen über Chlorophyll. Methoden und Ergebnisse. Berlin.
- (16) v. WISSELINGH, C. 1915. Ueber die Nachweisung und das Vorkommen von Carotinoiden in der Pflanze. Flora. **107**.

*Botanical Laboratory, Utrecht.*

December 1931.

**Medicine.** — *The use of plasmoquine in the prevention of malarial infections.* By S. P. JAMES, F. R. S., Lt. Col. I. M. S. (ret.). Ministry of Health, Whitehall, London. (Communicated by W. SCHÜFFNER.)

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

The paper by Prof. SWELLENGREBEL and Dr. A. DE BUCK on the "prophylactic use of plasmoquine in a dosage warranting reasonable safety for routine treatment", communicated to the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, at a meeting on the 31st October, shows clearly that the malarial infection which a person receives when he is bitten on one occasion by from 3 to 7 or more heavily infected mosquitoes cannot be prevented from developing by taking a dose of 1 cg of plasmoquine on the day before infection, three doses of 1 cg on the day of infection, and three doses of 1 cg on each of the five following days. The experiment seems in all respects to be comparable with the experiment reported in the issue of the Lancet for August 15th, 1931, page 341, in which 10 healthy volunteers were successfully protected against a similar heavy infection by taking plasmoquine in doses aggregating 6 cg daily instead of 3 cg as in Prof. SWELLENGREBEL's experiment. The conclusion which Prof. SWELLENGREBEL very properly deduces from a consideration of the results in the two experiments is that while a dosage of 6 cg daily taken in the manner and for the period described, appears to be sufficient to prevent development of the infection, a dosage of 3 cg cannot be depended upon to do so. In stating this conclusion he directs attention to two of the experimental conditions which must be taken into account if it is desired to apply these laboratory results to natural circumstances in the field. I should like to add one or two general remarks to what Prof. SWELLENGREBEL has already said on these two experimental factors, which are: 1<sup>o</sup>. the dose of sporozoites injected by the mosquito, 2<sup>o</sup>. the period during which the prophylactic drug is given. As regards the first factor, I would say in general that a chief difficulty in drawing conclusions from the results of chemoprophylactic experiments of the type with which our trials and those of Prof. SWELLENGREBEL are concerned is that existing knowledge on the sporozoite stage of the malaria parasite is unhappily very incomplete. In the first place there is no sure knowledge of what happens to sporozoites when the mosquito injects them into the blood or tissues of the person bitten, and in the second there is almost no trustworthy evidence of the comparative effect of different degrees of sporozoite infection. It has always been assumed that, when an infective mosquito bites a person, the sporozoites which it injects reach the circulation at

once and enter red blood corpuscles in which they grow to commence the parasitic asexual cycle. SCHAUDINN described the process of their penetration into red blood corpuscles in much detail but (although many have tried) no one has succeeded in repeating his observations. Thus the time has come when it must be considered whether or not our knowledge of that part of the life cycle of the malaria parasite is complete. Sporozoites are essentially parasites of tissue cells and it is possible that what happens to them when they are injected by the mosquito is that they are carried by the blood stream to reticulo-endothelial cells of the lungs and other organs and that they enter these cells and in them go through a cycle of growth and sporulation similar to the cycle of the allied bird parasite "halteridium" of which the transmitting insect is the fly *Lynchia maura*. The merozoites resulting from sporulation then escape from the cell and enter the red blood corpuscles of the circulation. The results of our further experiments in preventing malarial infection by the administration of plasmoquine lend support to the view that the action of the drug is against a subsidiary cycle of that type in tissue cells rather than that its action is simply to kill sporozoites while they are circulating in the blood. Perhaps that may be the reason why it is necessary, in order to obtain successful prophylactic results with smaller doses of plasmoquine than 6 cg daily, to begin the administration some days before infection and to prolong it for more than five days thereafter. In the series of experiments which we have in hand at the moment, daily administration of the drug is begun a week before the day of infection and is continued for ten days after infection. This series is part of a graduated series of experiments with different doses of the drug administered for different periods before and after infection. Another reason why such a series of experiments is necessary in order to ascertain what may be the smallest daily dose of plasmoquine that will prevent infection is that up to the present it is not known how quickly plasmoquine taken by the mouth is distributed through the system and tissues and how long the drug given in a single dose remains in the blood and tissues before it is all excreted. These are points about which it is hoped that further enquiry will be made. In the meantime our invariable reply to the numerous requests which we have received for a definite statement of the smallest daily dose which will effectively prevent infection is that the experiments are proceeding and that until they are completed no useful pronouncement on the subject can be made.

**Medicine.** — *An endemic focus of rhinoscleroma in Sumatra (Dutch East-Indies).* With remarks on the bacteriology and epidemiology.  
By E. P. SNIJDERS. (Communicated by W. SCHÜFFNER.)

(Communicated at the meeting of December 19, 1931.)

## I.

In 1918 the first case of rhinoscleroma has been observed in Sumatra in a woman coming from Asahan, who visited the policlinic of Dr. KNEBEL, in the neighbourhood of Medan (1). Dr. KNEBEL diagnosed a neoplasm of the nose and the upper-lip. The patient was operated upon, by Dr. STOLL, who sent me the resected tissue for microscopical examination, as he was struck by "the unusual aspect of the tumour".

The sections showed all outstanding characteristics of rhinoscleroma, viz. dense infiltration with plasmacells, cells of Mikulicz, eosinophilous globes of Pellizari, and encapsulated bacteria. Afterwards Dr. MANCOER informed us, that this patient was of Battak-(Tobanese)-origin and that she had come to Asahan with the emigrants from the Toba-Highlands, who descend from time to time to the coastal plains in great numbers, following the paths along the large Asahan-river. As a matter of fact, the population of Asahan is mostly of Battak-origin, and shows clearly the characteristic features of that tribe (2).

In 1923 Dr. DOORENBOS sent me the second case (3). It was a woman from the same part of Asahan and probably of Battak-origin too. The clinical histological and bacteriological diagnosis was clearly positive. In cultivating from the depth of the diseased tissue (operation-wound), I obtained a pure culture of *Klebsiella rhinoscleromatis*, showing the following features :

Rods, non-motile, encapsulated, Gram-negative.

Gelatin-stab : no liquefaction ; white, like a nail with a big convex head.

Gelatin-colonies : circular, white, convex, entire.

Agar-colonies : white, slimy, smooth, glistening.

Agar-slope : slimy, white, sliding down into the condensation-water.

Indole not formed.

Broth : turbid, with deposit, marked ring-growth, viscosity.

Potato : yellowish-white, slimy.

Milk : not coagulated.

Litmus-whey : (Petruschky) bluish-lilac, no reduction of the litmus.

Litmus-glucoseagar : no reduction of the litmus.

Medium of Rothberger-Oldekop (neutral red-glucose-agar) ; no change (no reduction).

In the sugar (and alcohol)-media : *no production of gas.*

In glucose, mannitol, maltose and saccharose acid is formed in 24—48 hours.

Lactose is not changed in 3 days. In 10 days in the incubator, at 37° C. some acid is formed, but *no gas.*

In galactose, lacvulose, xylose, arabinose, dextrin, salicin and sorbitol acid is formed, *but never gas.*

Dulcitol and glycerine : not changed.

Amygdalin : not dissociated.

By the demonstration of these two cases in the meetings of the Medical Society at Medan, the general attention was drawn to this disease, and when clinically suspect cases were seen, material was sent to the laboratory for verification.

Case 3 was observed in a Karo-Battak woman, by Dr. PANETH (4), who made an excision for diagnosis, which he sent to me for microscopical examination. The sections were positive.

Case 4, a Battak woman from Simelungun was detected by Dr. BAIS (5).

The next patient, case 5, was a Javanese woman, living in Sumatra since about 15 years. Though this is not quite sure, the infection most probably did not start till after her arrival in Sumatra. This woman lived all the time at Tandjong Bringin in Langkat, where also a common route of emigration leads from the Battak-plateau to the coastal plains, along the river Wampoo. So in this case too a contact with the Battaks is quite possible.

The case was a very typical one in all respects ; the strain grown from the scleromatous tissue itself proved identical with the strain of case 2. In the microscopical section all pathognomonic criteria of rhinoscleroma were present (case 5 of the thesis of Dr. DE MOOR (6)).

Case 6 again concerns a Battak woman, of Simelungun. The microscopical examination revealed the typical features and the culture was positive. This new specimen was identical with both the other ones. (Case 6 of Dr. DE MOOR).

Case 7 was an adult male Battak. Here, as in case 4, the diagnosis was based entirely on the very characteristic clinical symptoms, microscopical examination and cultivation of the microbes not being possible (6).

The origin, of these sporadic cases, observed during 9 years in rather extensive a region and at a distance one from another of 100 K.M. and more, was a rather mysterious one ; the more so, as according to the most probable hypothesis rhinoscleroma is a human infectious disease spreading from man to man. The only logical connection, I could find between the scattered patients, is the contact with the population of the

Battak-plateau, situated in the centre of the Northern part of the Isle of Sumatra, among which most of the cases have been observed.

This is why in March 1931 I made together with Dr. HAMSAH (of Battak origin himself), a tour of all the polyclinics of his district (Simelungun), part of the Battak territory. Here we found out three more cases (case 8, 9 and 10, of the list (7)).

Now a thorough revision of the historia morbi of all 10 cases in collaboration with Dr. HAMSAH, seemed to indicate a connection with the Tobapart of the Battakland, more especially the coast of lake Toba and the isle of Samosir (a large island of 90.000 inhabitants, situated in the middle of this lake).

According to the Battak legends this region is the cradle of the race. At the same time it is the most isolated part of the Battakland, the contact with the Europeans being of very recent date.

Pursuing this idea I then visited the hospitals of the Protestant mission in Toba. Dr. JOHANNSEN of Pearadja informed me that he had observed a case, in which he had made the diagnosis of rhinoscleroma because of the resemblance with the photographs he had seen of the other Sumatran patients. I had the opportunity to see this case afterwards (Ladjang, N° 11 of the list (7)), and to be able to examine an excision of the affected tissue, and to cultivate the bacteria from it. The sections and the culture were typical for rhinoscleroma. The patient was born and lived on the isle of Samosir. Moreover the military surgeon of Tarutung (Dr. LARSEN) and the missionaries, were all aware of having seen cases of "big nose" at the polyclinics of the island. All these data lead us to the hypothesis of a focus of rhinoscleroma in the centre of the Battak-Highlands.

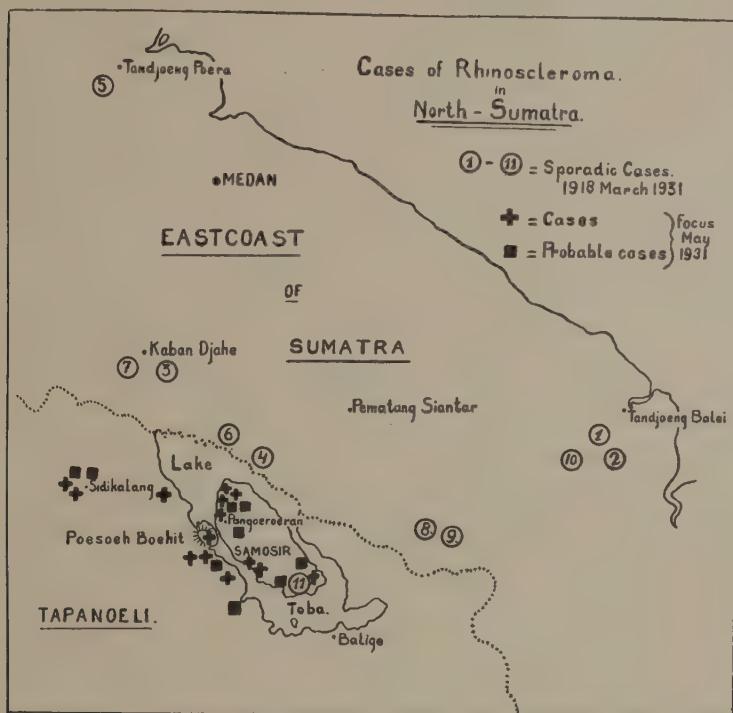
In May of the year 1931, I was able to organize a small expedition to lake Toba and Samosir with the collaboration of Dr. KOUWENAAR, the Director of the Central Pathological Laboratory of Medan. In a few days we discovered cases 12 to 21, confirmed microscopically and culturally and cases 22 to 28, which, though not verified in the laboratory, are reasonably sure too on clinical grounds.

Later on Dr. MAASLAND, (Medical Inspector of the residency of Tapanuli), who accompanied us on the expedition, noted 5 more cases (3 of which have been confirmed in the laboratory), in the neighbourhood of Silalahi and Sidikalang on the west coast of the lake Toba.

So the number of the known cases till now amounts to 33, 23 of which are concentrated on Samosir, and in the neighbourhood of the Poesoeh-Boehit (Mount "Umbilicus", see map), an extinct volcano on the coast of the lake, facing the spot, where the island is separated from the mainland only by a narrow canal.

As tradition has it, after the creation of the world, the first Battak couple (Si Asi Asi and Si Deang Nagoerasta), sent to earth by the principal God Moela Djadi Nabolon, settled on this spot and founded the first "Kampong" (native village). It is extremely interesting to note that

the focus of the rhinoscleroma is found just in the original centre of the Battak-population, thus suggesting in a certain measure, that the disease is a survival of ancient times, like leprosy is in Europe.



## II.

There are some special points which merit to be emphasized.

1. First of all the hypothesis, that rhinoscleroma is contagious, has been the leading idea of our research. It leads us to look for an endemic focus as the source of infection of the hitherto observed sporadic cases and to search for this focus especially in the neighbourhood of lake Toba. The fact that we actually did find it there is a strong argument in favour of the view that rhinoscleroma is a typically specific contagious disease.

2. It is a remarkable fact that the geographical distribution of rhinoscleroma and that of leprosy have much in common, though leprosy has a much wider range. All the known foci of rhinoscleroma are localised in areas (and among that part of population) where leprosy is occurring, mostly in endemic form. This holds true even for the small foci in Europe e.g. in Switzerland: Canton Wallis; in Italy: Reggio Emilia; in Germany: East Prussia (Memel). The conditions under which both diseases can spread and maintain themselves must be much the same.

The Battak-land too is a leprosy-area of high endemicity, as a matter of fact one of the highest of the whole Archipelago.

3. The bacterium (*Klebsiella rhinoscleromatis*) has been cultivated by us now in 20 cases (including those of Dr. MAASLAND, in which Dr. WOLFF isolated the microbes). All the cultures grown from the scleromatous tissue itself proved to be pure, and culturally identical. (See description in case 2). They proved all to be identical too with the strains obtained in Europe under the same precautions. Previously Dr. DE MOOR (6) had shown already that the smooth- as well as the rough-form of the Sumatran and European strains he tested, are identical in their antigenic structure and could be differentiated easily by precipitation- and agglutination-tests from the Friedländer- and *Ozaena*-bacteria.

If we cultivate from the nasal mucus only, we get nearly always a very mixed culture: cocci, proteus (which is spreading quickly over the plate, covers all other colonies and makes the pure culture of the latter impossible), sometimes bact. pseudo-diphtheriae, bacteria of the coli-, the lactis aërogenes (aërobacter)- and of the Friedländer-group. The microbes of the latter three groups can be differentiated readily from the *klebsiella rhinoscleromatis* by their more intensive and extensive fermentative power. They produce gas in nearly all of our common sugar- (and alcohol)-media. Lactose and glycerine are fermented (with very few exceptions) in 24—48 hours with gas-formation. Moreover in the medium of Rothberger-Oldekop (agar with glucose and neutral-red) all these microbes cause gas-production and a change of the red colour into green or yellow.

Now I do not mean to deny the importance of an examination of the nasal flora in sufferers from scleroma and contact-persons. On the contrary, as I pointed out in a former publication (7), it is an interesting fact, that the nasal mucus of the Battak in the focal area showed a richer and more divergent flora than the less filthy Javanese on the estates in the neighbourhood of Medan, especially in respect of the bacteria of proteus-, coli-, aërobacter-, and *klebsiella*-groups. This may be — and probably is — of epidemiological significance.

But I mean to lay full stress on the following essential points. In rhinoscleroma only the strains cultivated from the depth of the diseased tissue itself, are absolutely comparable; and all those isolated in this way proved to be identical in our hands. This uniformity of the strains from the isolated focus on the central Highlands of Sumatra and those from the great complex of foci in central and South-Eastern Europe is a striking fact. Thus we are forced to consider them as representing a well defined species or at least a "fixed variety". It is therefore not allowed to classify a bacterium as a *klebsiella rhinoscleromatis* because of the mere fact of its being a *klebsiella* cultivated from the nasal mucus of a probable case of rhinoscleroma or a contact-person; it can only be diagnosed definitely as such by means of its specific cultural and antigenic properties. These facts are not yet recognised in the handbooks, in BERGEY's Manual of



E. P. SNIJDERS: AN ENDEMIC FOCUS OF RHINOSCLEROMA IN SUMATRA  
(DUTCH EAST-INDIES).

PLATE I.



Fig. 1. Ama ni Paroema nr. 15 of the list. Typical case in a Tobanese.



Fig. 2. The same. (Note the Indian way of shaving the head, and the wavy hair).



Fig. 3. Same. Section.  $840 \times$ .  
Plasma-cells. Cell of Mickulicz. Bacteria.



Fig. 4. Same.  $840 \times$ .  
Levaditi-stain. Bacteria in wreath-form.



Fig. 5. Same.  $840 \times$ .  
Eosinophil. globes.

E. P. SNIJDERS: AN ENDEMIC FOCUS OF RHINOSCLEROMA IN SUMATRA  
(DUTCH EAST-INDIES).

PLATE II.



Fig. 1. Ama ni Lehem nr. 18 of the list.



Fig. 2. The same. Gangosa-like features.



Fig. 3. The same. Section.  $840 \times$ .  
Plasmacells; Vacuoles with wreaths of  
bacteria.

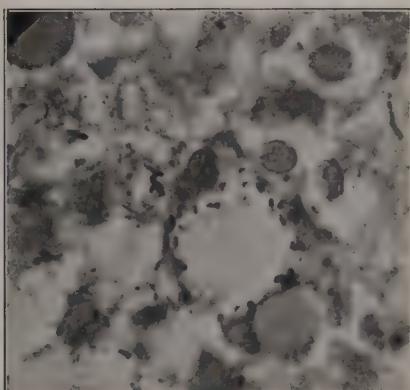


Fig. 4. The same.  $1350 \times$ . Levaditi.  
Bacteria in wreath-form. Hyaline globes  
(left corner above, right corner below).



Fig. 5. The same.  $840 \times$ . Strong local hyalinisation.



determinative Bacteriology, nor in the mayor part of the current literature. They are however of first importance.

4. The cases observed by us were all patients in whom the nose was principally affected. This does not mean, that other primary localisations did not occur. They were not observed, but it is highly probable that a more thorough investigation with collaboration of a laryngologist would discover also cases of primary scleroma of the larynx or trachea, of the so-called "laryngitis subglottica hypertrophica" (CZERMAK) or "sicca" (SCHRÖTTER) or "chorditis vocalis inferior hypertr. chron" (GERHARDT), or "blenorhoca chronica nasi, pharyngis et laryngis" (STÖRK (9)).

Some cases are of special interest because of the fact that clinically they showed much more features of gangosa (rhinopharyngitis mutilans) than of typical rhinoscleroma. Case N°. 18 of the list, Ama ni Lehem is a good instance.

Ama ni Lehem, marga Simbolon, male Battak, Tobanese, ± 50 years; he was born and lived in Kampong Boehit (1300 M. above Sea-level) on Samosir. He had never left the island for longer than a few days to go to Siantar.

According to his informations he never had framboesia, nor did he show any clinical symptoms disproving this statement.

His disease began about 8 years ago, with itching and swelling of the nose, followed by epistaxis and a bloody-purulent secretion.

This is a typical anamnesis of rhinoscleroma, as we got it nearly in all our cases. The swelling was accompanied afterwards by ulceration, followed by retraction of the scars, resulting in a monstrous deformation of the face. This is better demonstrated by the photographs than by a long description (figure 1 and 2 of plate II).

A part of the bean-sized swelling in the left upper angle of the ulcerating surface was resected for histological examination. All characteristic symptoms of rhinoscleroma were present in the microscopical sections (see fig. 3 to 5). From the depth of the operation wound cultures were made on agar: pure cultures of typical klebsiella rhinoscleromatis.

Doubtless this is a case of rhinoscleroma. One could be inclined to take it as a combination of scleroma and gangosa, the latter as a manifestation of tertiary framboesia. But the negative anamnesis (in men who know yaws very well) and the absence of distinct framboesiatic scars, makes this supposition highly improbable. Moreover I am not quite satisfied that the syndrom, we call gangosa, is always and everywhere to be described as tertiary framboesia only. Though I am not willing to deny the probability that in the majority of cases framboesia plays an important part in the etiology, I think that we must keep an open mind for other possibilities. As I suggested in my first communication on the subject, a scleromatous process with ulceration and extensive scarring may cause also the picture of gangosa. Up till now I saw 3 such cases. Further investigations in this direction may prove of value.

5. The question arises where does this mysterious isolated focus come from? Taken as granted that scleroma is a contagious disease confined to man, we are forced to ask if there is any possible connection with foci elsewhere. The nearest country where the disease is observed is India.

In 1890 KEEGAN (8) (in Indore) discovered the first cases in "Hindus", from the Central Provinces. In 7 years he saw 11 patients. RAYE (9) saw a case in a Mohammedan woman of a low class, and CASTELLANI and CHALMERS observed one in Ceylon in an "Indian coolie" (10).

Lately Prof. ACTON, pathologist of the Calcutta School of Trop. Med. informed me that in the last 10 years he saw 8 cases of rhinoscleroma, two from the Punjab (one in a Sikh), one from Nepal (in a man with "dravidian" features), the others from Bengal, Bihar, Orissa and the Central Provinces. He thinks that the disease must exist in a sporadic form throughout the country. All descriptions however relate to very advanced cases, searching relief for their troubles. Many slighter cases must be supposed to occur unnoticed. But up to the present an investigation to detect the possible foci did not take place. Most of the cases are observed in patients of "dravidian" origin, and low social standing. If we draw a parallel with our Sumatra experience, we safely may accept the existence of foci of rhinoscleroma among the more primitive tribes of the old "(pre)dravidian" stock, (Central Provinces, Bihar, Orissa, where indeed cases among the Santals are noticed; and the Deccan).

The term "dravidian" is not always used in the same sense. RISLEY (11) took it as the name for the original (at least the oldest known) population of India: dark-skinned, with a short (or low medium) stature, dolichomesocephalic, platyrhine and more or less cymotrichous. Many other investigators (THURSTON (12), HADDON (13)), call this the "pre-dravidian" type, reserving the name of "dravidian" for the type with finer features (leptorrhine and mesorrhine) and higher stature, supposed to have emerged after (according to others, from) the pre-dravidians. As a matter of fact the two types are very often mixed, and in South-India the higher castes exhibit the characters of the finer type (aryo-dravidians of RISLEY, dravidians s.s. of HADDON a.o.) the lowest castes and out-castes the coarser type ("dravidians" of RISLEY, pre-dravidians of other writers), while the intermediate castes show various degrees of mixture. The question of the origin of the "coarse type" is not quite settled, but it is now accepted by the majority of authors, that an important part of the "pre-dravidian population", viz. the tribes of the Chota Nagpur-tableau, the Mundas, Santals, Hos, etc. speak languages (Munda, Kolarian) of the Austric family. This Austric family is divided into the Austro-Asiatic subfamily (with the Mon-Khmer and the Mundabrand) and the Austro-Nesian subfamily, to which the Indonesian languages belong. Here we see the probability of a very old connection between an old stratum of the population of India and the so-called Indonesian component of the Malay Archipelago (the Mon-Khmer-problem: KERN, SCHMIDT). There are reasons to accept (as it is urged in the last Census-report of India, 1921) that a good deal of the tribes and lower castes, especially of the part of South-India surrounding the Munda-area, are of the same stock, though they are speaking nowadays dravidian languages. In descending from

their original dwellingplaces in the plains amongst the higher civilised population, they accepted the other language, but retained their physical type. As it is daily seen now, they then prefer to be called "Hindus". though their Hinduism does not differ much from their original Animism.

Be this as it is, but it struck me, that among the Battaks many individuals show a great resemblance to the coarse, "dravidian" type, as I saw it among the Indian labourers in the Federated Malay States and on the photographs in the book of RISLEY (11): The people of India.

Now I am quite aware that anthropology is largely a hypothetical science, especially as far as concerns the races of Southern Asia, and it is an easy matter to find amidst the fullness of suggested hypotheses, one fitting to a special point of view (13b). Exact anthropological data however are rare, but as far as the latter are available concerning the Battak (HAGEN (14), BRENNER (15), VOLZ (16)) they are in accordance (in any case are not conflicting) with those of the tribes of Chota Nagpur (RISLEY (11)): Dolicho-mesocephalic cranes, often cymotrichy, short (low medium) stature, platyrhiny. Amongst the Battaks also platyrhiny is predominant. Especially among the Tobanese of the North-Western part of Samosir and the Pak-Pak of Diari, the colour of the skin can be rather dark. In the Munda-tribes as well as in the Battak sometimes oblique eyes may be seen. Moreover it is interesting to note that the so-called biological race-index ( $\text{blood-group-index} = \frac{A + AB}{B + BA}$ ) of the Munda-, Santal- and Orāon-tribes of Chota Nagpur is found: 0.81 (MALONE and LAHIRI (17)) and that of the Battak 0.82 (BAIS and VERHOEF (18), DE HAAS (19)).

Besides the anthropological data, the ethnological data also have much in common. But this is a domain of science still more uncertain and surfeited with hypotheses. Still it may be noted, that the Battak (15, 16b, 20) as well as the Chota-Nagpur-tribes (11) are animists, and that in their religion (deities myths) as well as in their customs there is much likeness (exogamic septs, bargain-marriage; according to VOLZ (16b) remains of totemism among the Battaks; and many more special points, it would take too long to quote here). Though the positive value of these facts be small, we may conclude at least that there are no conflicting data.

All these arguments (linguistic, anthropological, and perhaps ethnological) point in the direction of an ancient connection between the Battak as rather pure representatives of a very old stratum of the people of the Malay Archipelago and a primitive population in India. And one is inclined to suggest the possibility that migrating parts of the same people in a stage of expansion, may have carried diseases as leprosy and rhino-scleroma with them, from a common original home.

There is still another possibility. Since the beginning of the historical period (a few centuries after the beginning of our era) we can find traces of a commercial traffic and intellectual intercourse between South-India

and Sumatra. Especially Baros was famous as the harbour for camphor and benzoin. As Professor VAN EERDE informed me, it is from this time that ethnologists date the beginning of the distinct Hindu-influence in North Sumatra, directly, but also indirectly, by means of Atchin and later of the Hindu-kingdoms of Java and Palembang. It is supposed that from this time date the Battak-alphabet, the PUSTAHA's (augury-books), the Hindu-element in the Battak-Art and language, the chess-game etc. In this period possibly also the Sembiring (the Black) made their appearance, one of the 5 headmarga's of the Karo-Battak. The customs of these marga have a certain resemblance to dravidian customs, especially the funeral-ceremonies (pekualu-feast, JOUSTRA (20b)), and the names of the sub-marga's are decidedly of Dravidian origin (KERN (21)). The physical type still reminds of the Singhalese Type in India (the finer dravidian or Aryo-dravidian of RISLEY) : the Sembiring are often leptorrhine, rather dark-skinned and perhaps of higher stature than the other marga's.

It seems doubtful to my mind whether the supposed prehistoric relation and the ascertained historic intercourse were separated distinctly by a long period of isolation. There may have been connections over a long period we are not aware of. But we are not yet in a position to discuss this question.

There are no convincing arguments however for the importation of scleroma into the Battak-country, within recent historical times. None of our cases belongs to the Marga Sembiring and as I pointed out above the focus is situated just in the old centre of the Battak-lands, a rather inaccessible region, where foreign influences have penetrated more difficultly than in the lower parts: Baros, Singkel and surroundings. In the latter region however no cases have been observed (though a more thorough investigation would be worth the trouble).

I am inclined therefore to accept that rhinoscleroma is a very ancient disease clinging to a very old and primitive stratum of the population. I am quite aware that the argumentation is rather hypothetical, but this hypothesis gives some indications for further research. In the first place for a comparative investigation into the anthropology of the Battak and the pre-dravidian tribes in India. In the second place it may stimulate further research on the occurrence of scleroma in our Archipelago, especially among the rests of the primitive population showing affinity to the "Battak-type".

#### LITERATURE.

1. SNIJDERS and STOLL. Geneesk. Tijdschr v. Ned. Ind. 1919. Vol. 59, p. XXVI. Transact. 4th Congres Far East Ass. of Trop. Med. Weltevreden 1921. Vol. II. p. 296. Acta Oto-laryngol. Vol. VI, p. 214.
2. HAMERSTER. Bijdrage tot de kennis v. d. afdeeling Asahan. Mededeeling No. 13. Oostkust v. Sumatra Inst. 1926.
3. SNIJDERS and DOORENBOS. Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1924. Vol. 64, p. XLIII.

LIST OF THE CASES OF RHINOSCLEROMA.

No.	NAME AND SEX	AGE	TRIBE	DWELLINGPLACE	PLACE AND DATE OF INFECTION	DURATION	LOCALISATION	DIAGNOSIS			REMARKS	
								BACT.	HISTOL.	CLINIC.		
1	woman	± 45 — 50	Battak emi- grated to Asahan	Tandjong-Balei Asahan. Sumatra	Probable the Battak- district. Centr. Su- matra	at least 15 years	nose, upper-lip, palate	not cultivated; typical bact. in the micr. sections	+	+	See: Geneesk. Tijdschrift v. Ned. Ind., 1919, Vol. 59, p. XXV. Transact. 4th Congress Far East Ass. of Trop. Med. 1921 Vol. II, p. 269.	
2	woman	± 40	Probable of Battak origin	Asahan, village Simpang-Ampat	Battak-district or contiguous part of Asahan	at least 5 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1924 Vol. 64, p. XLIII. 1923.	
3	woman Pekenaken	± 35 — 40	Karo-Battak	Battak-Highlands, village Boelan-Djahe	Battak-district 1920?	at least several years	nose	not cultivated ; bact. in the micr. sections	+	+	Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1924 Vol. 64, p. LXXIII. 1924.	
4	woman	± 30	Battak	Battak-Highlands, Tiga Ras	" " 1921?	at least several years	nose, upper-lip	not cultivated	no excision	+	Arch. f. Schiffs- & Tropenhyg. Beihefte Bnd. 29 (1925), p. 360 (there are described cases 1—4). 1924.	
5	woman	± 35 — 40	Javanese !	Tandjong Bringin Langkat	Lived already 15 years at Sumatra. 1912?	at least 15 years	nose, upper-lip, palate, lachrymal ducts	+	+	+	Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1927 Vol. 67, p. CXVI. 1927.	
6	woman Goepoeang	± 40	Battak	Simelungun	Battak-district 1921	6 years	nose	+	+	+	Gen. Tijdschr. v. N. I. 1928 Vol. 68, p. LXXXII. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. '28, I, p. 3105 (C. 5—6). 1927.	
7	man	± 30	"	Battak-district	" " 1920?	several years	nose, upper-lip, right lachrymal duct	not cultivated	no excision	+	Cases 1—7 are described in the thesis of Dr. DE MOOR: Het Rhinoscleroma in het bijz. in de Tropen. 1929. Amster- dam. 1923.	
8	woman Moïna	35	Toba-Battak	Simelungun	" " 1925	6 years	nose, palate	+	+	+	Ned. Tijdschr. v. Geneesk., 1931, IV, p. 5472.	
9	woman Dortiana	30	" "	"	" " 1920	10 years	nose	+	+	+	Intimate friend of No. 8. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, IV, p. 5472.	
10	man Oeloeng	43	" "	"	Asahan	1915?	nose	+	no excision	+	Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, IV, p. 5472. The mother has had the same disease.	
11	man Ladjang	± 30	" "	Isle of Samosir in lake Toba	Samosir	1920?	several years	nose, upper-lip	+	+	+	Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, IV, p. 5472.
12	man Ami ni Hapiling	± 40	" "	" "	"	1927	4 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Not yet described.
13	man Jonathan Sinagar	40	" "	" "	"	1928?	3 years	nose, upper-lip	+	+	+	Not yet described.
14	man Hapal Pasariboe	25	" "	Limbong on the shore of lake Toba near Samosir	Limbong	1928?	3 years	nose	+	+	+	Not yet described.
15	man Ama ni Paroema	± 50	" "	" "	"	1929?	2 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Not yet described. See plate I.
16	man Tanna Limbong	± 28	" "	" "	"	1928	3 years	nose, upper-lip	+? culture mixed with proteus	+	+	Not yet described. Brother of No. 27.
17	woman Karolina Goerning	± 20	" "	Isle of Samosir	Samosir	1921	10 years	nose, upper-lip	+	+	+	Not yet described. Daughter of No. 22. Sister of No. 23.
18	man Ami ni Lehem	± 50	" "	" "	"	1923	at least 8 years	nose, upper-lip, palate	+	+	+	Not yet described. Exulcerated, much retraction of the scars, great likeness to Gangosa. Plate II.
19	man Ama Radja Mira	± 35	" "	" "	"	1926	at least 4 years	nose, upper-lip, dacryocystitis, right side	+	+	+	Not yet described.
20	man Kleiophas	± 38	" "	" "	"	1930	8 years	nose, upper-lip	+	+	+	Not yet described.
21	woman Nanekka	± 35	" "	" "	"	1923	7½ years	nose	+	+	+	Not yet described. Niece of No. 28.

THE FOLLOWING CASES ARE NOT VERIFIED IN THE LABORATORY, BUT MOST PROBABLE ALSO RHINOSCLEROMA.

22	woman Gotang Boroe	± 50	Toba-Battak	Isle of Samosir	Samosir	19 ?	several years	nose, wings and septum infiltrated	?	no excision	+?	Not yet described. Mother of No. 17 and 23.
23	man, Lakanoes Goerning	± 22	" "	" "	"	1930?	1/2 year	nose, septum enlarged	?	"	+?	Complement-fixation with Rhinoscler.-Antigen pos. Wassermann neg. Kahn neg. Brother of 17, son of Nr. 22.
24	man Perhaling	± 40	" "	" "	"	1928?	several years	nose, hard and chron. swelling of top, wings, septum	?	"	+	
25	woman Kornela	± 25	" "	Saboelan on the shore of lake Toba near Samosir	Saboelan	1927?	4 years	nose, infiltration of the septum and the wings	?	"	+	
26	woman Teresiana	± 30	" "	Isle of Samosir	Samosir	1928?	± 2 years	nose, infiltration and clacatrisation of the wings	?	"	+	
27	man, Marinoes	± 25	" "	Limbong	Limbong	19 ?	?	nose, septum	—	"	+?	Brother of No. 16. (Tanna Limbong).
28	man, Ama Rhoelalan	± 45	" "	Isle of Samosir	Samosir	19 ?	?	nose, septum and wings	—	"	+	Uncle of No. 21. (Nanekka).



4. SNIJDERS and PANETH. Geneesk. Tijdschr. v. Ned. Ind. 1924. Vol. 64, p. LXXIII.
5. SNIJDERS. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1925. II, p. 1079. Arch. f. Schiffs- und Trop. Hyg. Bnd. 29. Beihefte I, p. 360.
6. DE MOOR. Het rhinoscleroma in het bijz. in de Tropen. Acad. Proefschr. Amsterdam 1929.
7. SNIJDERS and HAMSAH. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1931, p. 5472.
8. KEEGAN and CUNNINGHAM. Indian Medic. Gazette 1890 Vol. 24, p. 10.
9. RAYE. Indian Medic. Gazette 1890. Vol. 24, p. 97.
10. CASTELLANI and CHALMERS. Manual of Trop. Medicine 3rd Ed., p. 2277.
11. RISLEY. People of India. 2nd Ed, 1915.
- 11b. Census Report of India. 1921.
12. THURSTON. Castes and Tribes of Southern India. 1909.
13. HADDON. The races of Man. 1924.
- 13b. KLEIWEG DE ZWAAN. Rassen van den Indischen Archipel.
14. HAGEN. Verhand. Kon. Acad. v. Wetensch. afd. Nat. 1890. Vol. 28.
15. VON BRENNER. Besuch b. d. Kannibalen Sumatras. Würzburg 1894, p. 173.
- 16a. VOLZ. Arch. f. Anthropologie 1901. Bnd. XXVI, p. 717.
- 16b. VOLZ. Nord Sumatra. Bnd. I. Die Battakländer. Berlin 1909.
17. MALONE and LAHIRI. Indian Jl. of Med. Research 1928—29. Vol. XVI, p. 963.
18. BAIS and VERHOEF. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1924. II, p. 1212.
19. DE HAAS. Geneesk. Tijdsch. v. Ned. Ind. 1931. Vol. 71, p. 71.
20. JOUSTRA. Battakspiegel. 2e druk, 1926.
- 20b. JOUSTRA. Tijdschr. v. Ind. taal-, land-, en Volkenk. Vol. XLV, p. 541, and XLVI, p. 472.
21. KERN. Bijdragen tot taal-, land-, en Volkenk. v. Ned. Ind. Koninkl. Inst. 7e reeks. Vol. I (Vol. LV), p. 358.
22. Encyclopedie v. Ned. Indië.

